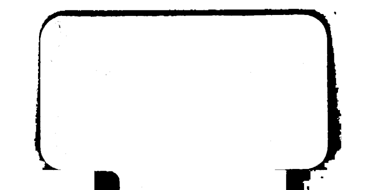

HDI
22NU F





Ausführliches

Lehrbuch der Analysis,

zum

Selbstunterricht

mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens

bearbeitet

von

H. B. Lübsen.

Neunte, vermehrte und verbesserte Auflage.

Leipzig.
Friedrich Brandstetter.
1895.

Vorwort zur ersten Auflage.

Die Wissenschaft, welche den Titel „Analysis“ führt, kann als eine Fortsetzung der Algebra und zugleich als eine Brücke zur Differential- und Integral-Rechnung betrachtet werden. Ihr Inhalt ist, wie der der Algebra, so mannigfaltig, dafs es auch hier unmöglich ist, denselben in wenigen Worten zusammenzufassen oder eine bestimmte Definition von dem Worte Analysis zu geben. Was dies Wort bezeichnet, kann man nur nach und nach erfahren.

Zu ihren Resultaten führen indessen mehrere sehr verschiedene Methoden. Wir haben diejenige gewählt, welche uns für den ersten Anfänger und zum Selbstunterricht, wozu dies Werk bestimmt ist, am geeignetsten schien.

Wer jedoch die Mathematik nicht als Mittel, sondern als Zweck betrachtet, wird schon von selbst nicht unterlassen, sich auch mit den übrigen, namentlich mit der Cauchy'schen Methode, bekannt zu machen.

Hamburg, im Juni 1853.

Lübsen.

Vorwort zur neunten Auflage.

Nach dem Tode des um die mathematischen Wissenschaften hochverdienten Verfassers des vorliegenden Werkes wurde der Unterzeichnete mit der Herausgabe der 7. und 8. und nun auch der 9. Auflage betraut. Äufsere Gründe bestimmten mich, die Anordnung des Stoffes unverändert zu lassen und den Umfang nur um ein Geringes im Interesse der präziseren Darstellung, der strenglogischen Deduktion und der unbedingt nötigen Ergänzungen zu vergröfsern. Dies gilt namentlich in Bezug auf die höhern arithmetischen Reihen (§ 34) in Verbindung mit den dieselben begründenden Sätzen (§ 33a bis § 33c) und hinsichtlich einiger Zusätze in den §§ 2, 34, 64b, 76, 80, 111, 120, 121b, 128, 129. Eine neuerdings von anderer Seite veröffentlichte Auflösung der Gleichung 4. Grades nötigt mich hier zu der Bemerkung, dafs ich die meinen Mufsestunden entsprossenen Theorieen der §§ 139 (Auflösungen der Gleichungen 4. Grades), 178—180 (Auflösung der Gleichungen auf Grund der höhern arithmetischen Reihen), 166b (Interpolation von nicht äquidifferenten Reihen), 78 (rationellere Berechnung vielstelliger Zahlen), 33 (elementare Ableitung des binomischen Lehrsatzes) schon im Jahre 1856 einigen Mathematikern von Ruf vorlegte. Die algebraische Auflösung des casus irreducibilis (§ 137) datiert aus neuester Zeit und ist eine Frucht mehrjähriger Studien. Neu hinzugekommen sind die für das höhere Rechnen nicht unwichtigen hyperbolischen Funktionen (§ 97a) und ein interessanter Zusatz zu § 24.

Leipzig, 1895.

Richard Schurig.

NB. Das Inhaltsverzeichnis befindet sich am Schlufs des Buchs.

Erstes Buch.

Kombinationslehre.

Einleitung.

1.

Die Kombinationslehre (Kombinatorik, Syntaktik) ist die Wissenschaft von den Gesetzen, nach welchen eine Anzahl gegebener Dinge sich ordnen und verbinden läfst. Sie hat als solche nicht allein ein rein wissenschaftliches, sondern auch ein praktisches Interesse, indem sie bei verschiedenen mathematischen Untersuchungen sehr oft Anwendung findet, namentlich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wo man das Reich der Möglichkeiten durchsucht und dessen Grenze bestimmt, dann auch in der Kunst zu beobachten und eine Reihe notwendiger Versuche in gehöriger Ordnung und Verbindung anzustellen.

2.

Um den oben ausgesprochenen Begriff der Kombinationslehre und das, was man unter Ordnen und Verbinden versteht, noch etwas deutlicher zu bezeichnen und zugleich die Hauptfragen, deren Beantwortung sie lehren soll, zuerst hervorzuheben, geben wir in nachstehendem die wesentlichsten Vorbegriffe und in den zunächst folgenden Paragraphen vorbereitende Beispiele.

Elemente nennt man in der Kombinationslehre Dinge (Individuen) ohne Rücksicht auf Quantität (Gröfse) und Qualität (Art). So sind z. B. a, d, e, oder 1, 4, 6 drei Elemente.

Komplexion (Gruppe) ist eine Vereinigung (Zusammenstellung) von Elementen, die nach irgend welcher Reihenfolge angeordnet sind. So ist z. B. $a\,d\,b\,c$ eine Komplexion von 4 Elementen, 231 eine Komplexion von 3 Elementen.

Zwei Elemente bilden eine „Inversion", wenn das erste dieser beiden höher als das zweite ist. So hat z. B. 2 4 3 1 vier Inversionen: 21, 43, 41, 31.

3.

Es sei die Aufgabe gegeben: Alle möglichen vierzifferigen Zahlen darzustellen, welche sich mit den vier Ziffern 1, 2, 3, 4 schreiben lassen.

Einige der hier geforderten Zahlen darzustellen, ist offenbar leicht. Verschieden sind z. B. schon die Zahlen 1234, 1243, 1423, 3124 &c. Allein man sieht wohl, worauf es ankommt, um alle möglichen zu erhalten, nämlich eine allgemeine Methode zu finden, nach welcher man eine Anzahl Elemente (die wir der leichteren Übersicht halber mit Ziffern bezeichnen wollen) in allen möglichen verschiedenen Folgen (Nebeneinandersein) hinschreiben kann, oder, was dasselbe ist, in einer Komplexion von Elementen, z. B. in 1, 2, 3, 4, die Plätze derselben auf alle mögliche Weise zu verwechseln. Derjenige Teil der Kombinationslehre, welcher diese Art Aufgaben lösen, nämlich alle möglichen Versetzungen (Permutationen) einer bestimmten Anzahl Elemente angeben lehrt, heifst Permutation und durch die Bezeichnung P (1, 2, 3, 4), wofür man auch P_4 oder auch P (4) oder P (a, b, c, d) oder P $(a \,\|\, d)$ schreibt, wird die hier in Worten ausgesprochene Forderung kurz angedeutet.

4.

Es sei ferner die Aufgabe gegeben: Alle möglichen Verbindungen (Kombinationen) darzustellen, welche sich aus einer gegebenen Anzahl Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6 (z. B. Sauerstoff, Wasserstoff, Stickstoff, Kohle, Schwefel &c.) herstellen lassen, indem man je zwei, oder je drei &c. Elemente verbindet, oder wie es in der Kunstsprache heifst, zur zweiten, dritten Klasse &c. kombiniert und welche Forderung in Zeichen durch $\overset{2}{C}$ (1,2,3,4,5,6), $\overset{3}{C}$ (1, 2, 3, 4, 5, 6) angedeutet wird. Für den letzteren Ausdruck findet man auch die Abkürzungen $\overset{3}{C}$ (6) oder $\underset{3}{C}$ (6) oder C_3 $(1 \,\|\, 6)$ u. s. w.

Einige dieser verschiedenen Kombinationen aus den sechs Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 lassen sich offenbar leicht bilden. Zur zweiten Klasse hätte man unter andern z. B. 12, 13, 16, 23, 35 &c. und zur dritten Klasse z. B. 123, 124, 136, 345 &c. Derjenige Teil der Kombinationslehre, welcher diese Art Aufgaben lösen lehrt und ein allgemeines Verfahren angiebt, alle an Inhalt verschiedenen Kombinationen zu einer bestimmten Klasse darzustellen, sowie auch eine allgemeine Regel aufstellt, ihre Anzahl im voraus zu berechnen, heifst Kombination. Hierbei dürfen also keine Permutationen einer schon aufgestellten Kombination vorkommen, und Formen, wie 123, 132, 213 z. B. wären also, weil sie ganz dieselben Elemente enthalten, an Inhalt gleich und für eine zu rechnen, weshalb man auch nur eine, hier am passendsten 123, aufstellt.

5.

Es sei endlich noch die Aufgabe gegeben: Aus mehreren verschiedenen Reihen Elemente alle möglichen Kombinationen so zu bilden, dafs jede der verschiedenen Kombinationen aus jeder Reihe ein Element enthält, z. B. eine Reihe verschiedener Säuren A, B, C, D ...... mit einer Reihe verschiedener Basen *a*, *b*, *c* ... zu verbinden, so dafs jede der möglichen Kombinationen eine Säure und eine Base enthält.

Diese dritte Aufgabe ist offenbar darin von der vorhergehenden zweiten Aufgabe (§ 4) sehr verschieden, weil dort die Elemente aus einer und derselben Reihe, hier aber die Elemente aus verschiedenen Reihen miteinander verbunden werden sollen. Zur Unterscheidung nennt man deshalb auch den Teil der Kombinationslehre, welcher diese letztere Art Aufgabe zu behandeln, d. h. eine Methode und eine Regel aufzustellen hat, nach welcher man alle möglichen Verbindungen dieser Art darstellen und ihre Anzahl im voraus berechnen kann, Variation*).

Einige der verschiedenen Verbindungen (Variationen) aus den beiden obigen Reihen A, B, C, D .. und *a*, *b*, *c*, *d* .. wären

*) Dies Wort, Variation, ist freilich nicht bezeichnend und schon deshalb sehr unpassend gewählt, weil es später in einem ganz andern Sinne zur Bezeichnung des höchsten Teils der Infinitesimalrechnung gebraucht wird.

z. B. A*a*, A*b*, A*c* . . ., B*a*, B*b* &c. Bei der Variation ist der Grad der Klasse offenbar durch die Zahl der verschiedenen Reihen bestimmt.

Sind *m* verschiedene Reihen, jede von *n* Elementen gegeben, so bezeichnet man die Anzahl aller nur möglichen Variationen mit $\overset{m}{V}(1, 2, 3, \ldots n)$ oder $\overset{m}{V}(n)$ oder $\underset{m}{V}(1 \,\|\, n)$ u. s. w.

6.

Hiermit hätten wir nun die Hauptfragen der Kombinationslehre, welche die folgenden in Aufgaben gekleideten Paragraphen beantworten sollen, zuerst hervorgehoben und mit dem Anfänger besprochen. Und da dieser nun gehörig vorbereitet ist und weiſs, worauf es ankommt, so möge er jetzt versuchen, die folgenden Aufgaben selbständig zu lösen und diese Wissenschaft selber zu erfinden.

Permutation.

7.

Aufgabe. Ein Verfahren anzugeben, nach welchem man alle möglichen Permutationen einer gegebenen Anzahl Elemente, z. B. P (1, 2, 3, 4), darstellen kann.

Auflösung. Die bequemste Regel scheint folgende zu sein: Man schreibe die mit Ziffern (Zeigern, Indices) bezeichneten Elemente erst in natürlicher (arithmographischer) Folge hin, so erhält man die niedrigste Form, hier also: 1234. Durchlaufe diese erhaltene Form rückwärts, bis man an ein niedrigeres Element kommt, setze an dessen Stelle das darauf folgende höhere (oder wenn mehrere höhere folgen, das nächst höhere) und lasse hierauf die durchlaufenen (das verdrängte mitgerechnet) in natürlicher Ordnung folgen. Diese einfache Regel wird für jede erhaltene Form so oft wiederholt, bis alle Permutationen zum Vorschein gekommen. Aus P (1, 2, 3, 4) hat man zuerst die niedrigste Form 1234. Weil nun 3 niedriger als 4, so ist die n ä c h s t höhere Form 1243. Durchläuft man diese wieder rückwärts, so kommt man erst bei 2 an ein niedrigeres Element; setzen wir an dessen Stelle das nächst höhere der beiden

durchlaufenen, so folgt aus der Form 1243 die nächst höhere 1324 &c., nämlich:

P (1, 2, 3, 4)

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Dafs man auf diese Weise alle möglichen Permutationen sicher erhält, ergiebt sich daraus, weil man allmählich von der niedrigsten Form bis zur höchsten aufsteigt, worauf die Regel nicht mehr angewandt werden und mithin auch keine mögliche Form fehlen kann.

8.

Formen, welche dasselbe Anfangs-Element haben, rechnet man zu einerlei Ordnung. Vorstehendes Beispiel giebt also vier verschiedene Ordnungen, weil offenbar jedes Element gleich oft an die Spitze zu stehen kommt.

9.

Aufgabe. Eine allgemeine Regel oder Formel zu finden, nach welcher man die Anzahl aller möglichen Permutationen aus n Elementen berechnen kann.

Auflösung 1. Ein Element (1) giebt keine Versetzung, also nur eine Komplexion, kommt aber ein zweites (2) hinzu, so kann dieses jenem auf zwei verschiedene Weisen zugesellt, nämlich nach- und auch vorgesetzt werden; mithin geben zwei Elemente $1 . 2 = 2$ Permutationen, nämlich 12, 21. Kommt noch ein drittes Element (3) hinzu, so kann dieses jeder der beiden vorhergehenden Formen auf drei verschiedene Weisen zugesellt, nämlich nach-, zwischen- und vorgesetzt werden. Drei Elemente geben also $2 . 3 = 1 . 2 . 3 = 6$ Permutationen. Ein viertes Element (4) findet bei jeder der vorhergehenden 6 Permutationen vier verschiedene Plätze. Vier Elemente geben also $1 . 2 . 3 . 4 = 24$ Permutationen. Setzt man diese Schlufsreihe fort (Beweis durch Induktion!) und bezeichnet die Anzahl

Permutationen aus n Elementen mit P_n, so findet man leicht, dafs ganz allgemein

$$P_n = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots . n = n!$$ (lies: „n Fakultät").

Auflösung 2. Weil jedes der n Elemente gleich oft an die Spitze kommt (§ 8), so erhält man die Anzahl der Permutationen aus n Elementen offenbar auch, indem man die Anzahl der Permutationen aus $n - 1$ Elementen mit n multipliziert, weil es n verschiedene Ordnungen geben mufs. In Zeichen:

$$P_n = n . P_{n-1}.$$

Setzt man nun in diese Formel nach und nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ so hat man, weil $P_1 = 1$,

$$P_2 = 2 . P_1 = 2 . 1 = 2!$$
$$P_3 = 3 . P_2 = 3 . 2 . 1 = 3!$$
$$P_4 = 4 . P_3 = 4 . 3 . 2 . 1 = 4!$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$P_n = n . P_{n-1} = n (n-1)(n-2) \ldots\ldots 3 . 2 . 1 , = n!$$

10.

Sind unter den zu permutierenden Elementen mehrere gleiche, wie es häufig der Fall ist, so leuchtet ein, dafs die Anzahl der möglichen Permutationen nicht so grofs sein kann, als wenn die Elemente alle verschieden wären, weil die Plätze-Vertauschung gleicher Elemente keine Formveränderung hervorbringt. Es fragt sich nun, wie man in solchem Falle die Anzahl der möglichen verschiedenen Formen im voraus berechnen kann. Das Verfahren, sie wirklich darzustellen, bleibt dasselbe, wie in § 8. So giebt z. B. P (1, 1, 1, 2, 2, 3):

111223	$1_1 1_2 1_3 223$
111232	$1_1 1_3 1_2 223$
111322	$1_2 1_1 1_3 223$
112123	$1_2 1_3 1_1 223$
112132	$1_3 1_1 1_2 223$
112213	$1_3 1_2 1_1 223$
112231	———
112312	$1_1 1_2 1_3 2_1 2_2 3$
112321	$1_1 1_2 1_3 2_2 2_1 3$

u. s. w.

Nennen wir die Anzahl der verschiedenen Permutations-Formen x, so ist klar, daſs, wenn in jeder dieser x verschiedenen Formen die drei gleichen Elemente (1, 1, 1) verschieden würden, dann auch durch Permutation derselben statt jeder der x Formen $1 \,.\, 2 \,.\, 3 = 6$mal soviel kommen würden (wie es für die niedrigste Form 111223 in nebenstehender Reihe angedeutet worden). Würden in jeder dieser verschiedenen $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, x$ Formen auch noch die zwei gleichen Elemente (2, 2) verschieden, so würden aus jeder der $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, x$ Formen noch $1 \,.\, 2 = 2$mal soviel hervorgehen. Dann müſste man offenbar so viele Formen erhalten, als wenn alle sechs Elemente verschieden wären. Daher ist (§ 9)

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, x = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6.$$

$$x = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 1 \,.\, 2}$$

$$x = 60.$$

Ist allgemein n die Anzahl aller Elemente und darunter einmal p, einmal q und einmal r gleiche, so ist die Anzahl aller möglichen Permutationen

$$P_n = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (n-1)\, n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots p \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots q \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots r} = \frac{n!}{p!\, q!\, r!}$$

Kombination.

11.

Aufgabe. Ein Verfahren anzugeben, nach welchem man aus einer gegebenen Anzahl verschiedener Elemente alle möglichen verschiedenen Kombinationen zu einer bestimmten Klasse bilden kann, z. B. $\overset{3}{C}$ (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Auflösung. Man stelle so viele der niedrigsten Elemente in natürlicher Folge zusammen, als der Klassenexponent (der hier 3 ist) Einheiten hat. Aus der erhaltenen niedrigsten Form leite man successive die nächst höheren ab, indem man in die letzte Stelle nach und nach die noch vorhandenen höheren Elemente nach ihrer Aufeinanderfolge setzt. Läſst sich in die letzte Stelle kein höheres Element mehr setzen, so muſs man erst die vorletzte (vorvorletzte &c.) Stelle erhöhen und dann

wieder wie vorhin verfahren, so dafs nie ein niedrigeres Element auf ein höheres folgt und auch keine Permutation stattfindet. Alsdann müssen alle an Inhalt verschiedenen Kombinationen auf diese Weise sogleich geordnet zum Vorschein kommen. So ist z. B.

$\overset{1}{C}$ (1,2,3,4,5,6)

1,2,3,4,5,6

$\overset{2}{C}$ (1,2,3,4,5,6)

12	23	34	45	56
13	24	35	46	
14	25	36		
15	26			
16				

$\overset{3}{C}$ (1,2,3,4,5,6)

123	234	345	456
124	235	346	
125	236	356	
126	245		
134	246		
135	256		
136			
145			
146			
156			

$\overset{4}{C}$ (1,2,3,4,5,6)

1234	2345	3456
1235	2346	
1236	2356	
1245	2456	
1246		
1256		
1345		
1346		
1356		
1456		

$\overset{5}{C}$ (1,2,3,4,5,6)

12345	23456
12346	
12356	
12456	
13456	

$\overset{6}{C}$ (1,2,3,4,5,6)

123456

12.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man die Anzahl aller möglichen Kombinationen zu einer bestimmten Klasse aus einer gegebenen Reihe verschiedener Elemente im voraus berechnen kann.

Auflösung. Nehmen wir zuerst an, man habe 6 Elemente, so ist klar, dafs es nur 6 Kombinationen zur ersten Klasse giebt. Zu jedem dieser 6 Elemente läfst sich jedes der 5 übrigen setzen, was dann $6 . 5 = 30$ Verbindungen (Arrangements) zur zweiten Klasse giebt. Da nun aber kein Element

vor dem andern einen Vorzug hat, sondern alle auf gleiche Weise in die Verbindungen eintreten, mithin jedes Element gleich oft **vor** und **nach** zu stehen kommen mufs, so sind diese 6 . 5 Verbindungen offenbar je zwei an Inhalt gleich oder permutiert. Man hat z. B. 12 und auch 21; 13, 31; 14, 41 &c. Nennen wir also die Anzahl der wirklichen, an Inhalt verschiedenen Kombinationen aus 6 Elementen zur zweiten Klasse x (vergl. die letzten Zeilen von § 4), so geben diese $1 . 2\, x$ Permutationen und weil dann $1 . 2 . x = 6 . 5$ sein mufs, so ist $x = \frac{6 . 5}{1 . 2} = 15$.

Jede der 6 . 5 permutierten Kombinationen aus den 6 Elementen zur zweiten Klasse läfst sich mit jedem der 4 übrigen Elemente verbinden, was 6 . 5 . 4 Verbindungen zur dritten Klasse giebt. Da nun aber in diesen Verbindungen jedes Element notwendig wieder auf gleiche Weise vorkommen, d. h. gleich oft vor, in der Mitte und am Ende stehen mufs, so erscheint hier jede Kombination in allen ihren Permutationsformen. Nennt man also die Anzahl der wirklich verschiedenen Kombinationen aus 6 Elementen zur dritten Klasse x, so ist, weil jede derselben 1 . 2 . 3 Permutationen giebt, $1 . 2 . 3 . x = 6 . 5 . 4$. Daher $x = \frac{6 . 5 . 4}{1 . 2 . 3}$.

Setzt man diese Schlufsreihe fort, so ergiebt sich die Anzahl der Kombinationen aus 6 Elementen zur vierten Klasse $= \frac{6 . 5 . 4 . 3}{1 . 2 . 3 . 4}$; zur fünften Klasse $= \frac{6 . 5 . 4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}$ u. s. w. Allgemein ist also die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur $m$ten Klasse

$$P_m . \overset{m}{C}_n = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots\ldots (n-[m-1]),$$

also, da $P_m = 1 . 2 . 3 \ldots . m$ ist (§ 9),

$$\overset{m}{C}_n = \frac{n\,(n-1)\,(n-2) \ldots\ldots (n-[m-1])}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;\ldots\; m}.$$

13.

Die vorhergehende Formel läfst sich auch auf folgende Weise finden:

123	4567	237	1456
124	3567	245	1367
125	3467	246	1357
126	3457	247	1356
127	3456	256	1347
134	2567	257	1346
135	2467	267	1345
136	2457	345	1267
137	2456	346	1257
145	2367	347	1256
146	2357	356	1247
147	2356	357	1246
156	2347	367	1245
157	2346	456	1237
167	2345	457	1236
234	1567	467	1235
235	1467	567	1234
236	1457		

Denkt man sich die Reihe der zu kombinierenden Elemente, z. B. $\overset{3}{C}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, durch einen Einschnitt in zwei Gruppen geteilt, wovon die erste soviel Elemente enthält, als der Exponent der Klasse Einheiten hat, und verfährt dann ganz nach der § 11 gegebenen Kombinations-Regel, nur mit dem Unterschiede, dafs man (gerade wie bei der Permutation) jedesmal die übrigen Elemente in natürlicher Ordnung in der zweiten Kolumne folgen läfst, so erhält man offenbar nicht allein die Kombinationen zur dritten Klasse, sondern zugleich auch die Kombinationen zur $7 - 3 = 4$ten Klasse, jedoch in umgekehrter Ordnung der Vorschrift. Auf die erste niedrigste Form linker Seite folgt die höchste Form rechter Seite, dann auf die nächst höhere linker Hand die nächst niedrigere rechter Hand &c. bis zur höchsten und niedrigsten beiderseits, und es ist klar, dafs aus diesem Grunde alle möglichen Kombinationen zur dritten und vierten Klasse aus den 7 Elementen notwendig zum Vorschein kommen müssen.

Was nun ihre Anzahl anbetrifft, so sei diese $= \overset{3}{C}_7$. Denkt man sich die Kombinationen diesseits des Striches sämtlich permutiert, so würde man offenbar $1 . 2 . 3$mal soviel, also $1 . 2 . 3 . \overset{3}{C}_7$ Formen von 7 Elementen erhalten. Denkt man sich in diesen $1 . 2 . 3 . \overset{3}{C}_7$ Formen auch noch die, je vier verschiedenen, Elemente hinter dem Striche permutiert, so giebt dies wieder $1 . 2 . 3 . 4$mal soviel, mithin $1 . 2 . 3 . 4 . 1 . 2 . 3 . \overset{3}{C}_7$. Diese Anzahl mufs nun aber mit der Anzahl aller Permutationen aus 7 Elementen übereinstimmen. Daher ist $P_{7-3} . P_3 . \overset{3}{C}_7 = P_7$, also

$$1 . 2 . 3 . 4 . 1 . 2 . 3 . \overset{3}{C}_7 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7;$$

woraus

$$\overset{3}{C}_7 = \frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.4.1.2.3} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$$

folgt.

Allgemein ist also die Anzahl aller Kombinationen zur $m$ten Klasse aus n Elementen durch die Relation

$$P_{n-m} \, . \, P_m \, . \, \overset{m}{C}_n = P_n$$

gegeben; mithin ist

$$\overset{m}{C}_n = \frac{1.2.3.4 \ldots (n-m)\,(n-m+1)\,(n-m+2) \ldots (n-1)\,n}{1.2.3.4 \ldots (n-m) \quad . \quad 1 \quad . \quad 2 \quad \ldots\ldots . m}$$

$$\text{oder } \overset{m}{C}_n = \frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-[m-1])}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \quad \ldots\ldots\ldots m}.$$

Anmerkung. Aus den vorhergehenden Betrachtungen hat sich zugleich ergeben, dafs aus n Elementen ebensoviele Kombinationen zur $m$ten, als zur $(n-m)$ten Klasse möglich sind. Oder es ist

$$\overset{m}{C}_n = \overset{n-m}{C}_n.$$

Kombinationen mit Wiederholung.

14.

Aufser der im vorigen Paragraphen erwähnten Kombination kommt es auch vor, eine Reihe Elemente zu einer bestimmten Klasse so zu kombinieren, dafs jedes der Elemente in derselben Form bis so oft wiederholt (mit sich selbst verbunden) werden darf, als der Exponent der Klasse Einheiten hat. Man nennt dies Kombination mit Wiederholung und deutet sie durch das Zeichen C' an. Dies ist dann ganz dasselbe, als wenn man in der Reihe der zu kombinierenden Elemente jedes Element so oft vorhanden denkt, als der Klassen-Exponent Einheiten hat, so dafs also $\overset{3}{C}{}'$ (1,2,3,4) = $\overset{3}{C}$ (1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4), mithin nur eine kürzere Schreibart.

15.

Aufgabe. Eine Regel anzugeben, nach welcher man die Kombinationen mit Wiederholung, z. B. $\overset{4}{C}{}'$ (1,23,4,5) darstellen kann.

Auflösung. Die Regel ist hier ganz dieselbe wie bei der Kombination ohne Wiederholung. Man schreibt nämlich das niedrigste Element so oft hin, als der Klassen-Exponent Einheiten hat; setzt dann in die letzte Stelle successive die nächst höheren Elemente aus der gegebenen Reihe. Ebenso verfährt man mit der vorletzten, vorvorletzten Stelle &c., indem man aber die darauf folgenden Stellen nicht mit den nächst höheren, sondern mit demselben Element (weil es wiederholt werden darf) besetzt. Auf diese Weise erhält man aus der niedrigsten Form erst die n ä c h s t höhere, aus dieser wiederum die n ä c h s t höhere &c. bis zur höchsten Form und mithin alle möglichen Formen in den verschiedenen Ordnungen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. (Die Bedeutung der mit *α*, *β*, *γ*, *δ*, *ε* bezeichneten Kolumnen wird der folgende Paragraph geben.)

$$\overset{4}{C'}(1,2,3,4,5)$$

a	*α*	*b*	*β*	*c*	*γ*	*d*	*δ*	*e*	*ε*
1111	1234	2222	2345	3333	3456	4444	4567	5555	5678
1112	1235	2223	2346	3334	3457	4445	4568		
1113	1236	2224	2347	3335	3458	4455	4578		
1114	1237	2225	2348	3344	3467	4555	4678		
1115	1238	2233	2356	3345	.				
1122	1245	2234	.	3355	.				
1123	1246	2235	.	3444	.				
1124	.	2244	.	3445	.				
1125	.	2245	.	3455	.				
1133	.	2255	.	3555	3678				
1134	.	2333	.						
1135	.	2334	.						
1144	.	.	.						
1145	.	.	.						
1155	.	.	.						
1222	.	2555	2678						
1223	.								
.	.								
.	.								
1555	1678								

16.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man die Anzahl aller Kombinationen mit Wiederholung aus n Elementen zur $m$ten Klasse berechnen kann.

Auflösung. Man denke sich alle Kombinationen mit Wiederholungen, z. B. $\overset{4}{C}{}'$ (1,2,3,4,5), wirklich hingeschrieben und folgende Veränderung damit vorgenommen: Das Anfangs-Element bleibe in jeder Kombination unverändert, die zweite Stelle aber werde um eine Einheit, die dritte Stelle um zwei Einheiten &c. erhöht, wie in § 15 durch die neben a, b, c, d, e stehenden Reihen α, β, γ, δ, ε angedeutet, so erhellet leicht, dafs dadurch aus den Kombinationen mit Wiederholung notwendig just so viele Kombinationen ohne Wiederholung zu derselben Klasse hervorgehen müssen, jedoch aus so vielen Elementen mehr, als der Exponent der Klasse Einheiten hat, weniger eins. So geben z. B. 5 Elemente zur vierten Klasse mit Wiederholung genau so viele Kombinationen, als $5+3=8$ Elemente zur vierten Klasse ohne Wiederholung, nämlich: $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}=70$. (§ 12.)

Ferner geben 20 Elemente zur fünften Klasse mit Wiederholung so viele Kombinationen, als $20+4=24$ Elemente zu derselben Klasse ohne Wiederholung, nämlich: $\frac{24.23.22.21.20}{1.2.3.4.5}$.
Allgemein: n Elemente zur $m$ten Klasse mit Wiederholung geben so viele Kombinationen, als $n+m-1$ Elemente zur $m$ten Klasse ohne Wiederholung. Also in Zeichen:

$$\overset{m}{C}{}'_n = \overset{m}{C}_{n+m-1}, \text{ oder}$$

$$\overset{m}{C}{}'_n = \frac{(n+m-1)\,(n+m-2)\ldots n}{1\;.\;2\;\ldots m},$$

oder so geschrieben:

$$\overset{m}{C}{}'_n = \frac{n\,.\,(n+1)\,.\,(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots m}$$

Variation.

17.

Sind mehrere verschiedene Reihen von Elementen gegeben und sollen aus ihnen alle möglichen verschiedenen Verbindungen so dargestellt werden, dafs jede Verbindung ein Element aus jeder Reihe enthält, also weder Wiederholung noch Permutation stattfinden darf, so nennt man, wie schon in der Einleitung erwähnt, eine solche Art Kombination aus mehreren Reihen: Variation. Der Exponent der Klasse ist also hierbei durch die Anzahl der gegebenen Reihen im voraus bestimmt.

18.

Aufgabe. Ein Verfahren anzugeben, nach welchem man alle möglichen Variationen aus einer gegebenen Anzahl Reihen, z. B. aus den drei: A, B, C, D; *a*, *b*, *c*, *d* und α, β, γ, δ, darstellen kann.

Auflösung. Man stelle die gegebenen Reihen untereinander:

A, B, C, D
a, *b*, *c*, *d*
α, β, γ, δ

Die Anfangs-Elemente der Reihen zusammengestellt, geben die niedrigste Form, nämlich A*a*α. Hieraus folgen nach und nach die nächst höheren Formen, indem man in die letzte Stelle successive die nächst höheren Elemente der letzten Reihe setzt, bis dieselbe ganz erschöpft ist. Hierauf wird die vorletzte Stelle durch das nächst höhere Element der bezüglichen (vorletzten) Reihe, die letzte Stelle aber wieder mit dem Anfangs-Element der letzten Reihe besetzt &c., wie nachfolgend angedeutet:

A*a*α	B*a*α	C*a*α	D*a*α
A*a*β	B*a*β	C*a*β	D*a*β
A*a*γ	B*a*γ	C*a*γ	D*a*γ
A*a*δ	B*a*δ	C*a*δ	D*a*δ
A*b*α	B*b*α	C*b*α	D*b*α
A*b*β	B*b*β	C*b*β	D*b*β
⋮	⋮	⋮	⋮
A*d*δ	B*d*δ	C*d*δ	D*d*δ

Es ist klar, dafs man auf diese Weise notwendig alle Variationsformen, von der niedrigsten, A$a\alpha$, bis zur höchsten, D$d\delta$, erhalten mufs.

Anmerkung. Hätte man das Produkt aus den drei vierteiligen Faktoren $A + B + C + D$; $a + b + c + d$ und $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ zu entwickeln gehabt, so ist einleuchtend, dafs die Teile des Produktes mit den obigen, durch Variation erhaltenen Formen übereinstimmen müssen; kurzum, dafs der Mechanismus der Multiplikation durch Variation ersetzt werden kann. Diese Bemerkung ist für die Folge wichtig und deshalb wohl zu beachten.

19.

Um bei der wirklichen Darstellung der Variation durch Einführung der Ziffern, als Stellvertreter der Elemente, eine bequemere und deutlichere Schreibweise zu erhalten, wollen wir alle Anfangs-Elemente der verschiedenen Reihen mit 1, alle zweiten mit 2 &c. bezeichnen. Setzen wir dann noch fest, dafs die Stellenzahl in einer Variationsform zugleich diejenige (1ste, 2te etc.) Reihe angiebt, aus welcher das bezügliche Element genommen werden mufs, so lassen sich alle Variationen nach der vorhin gegebenen Regel leicht darstellen, wie nachfolgendes Beispiel zeigt:

1	2	3	4
A,	B,	C,	D
a,	b,	c,	d
α,	β,	γ,	δ
111	211	311	411
112	212	312	412
113	213	313	413
114	214	314	414
121	221	321	421
122	222	322	422
123	223	323	423
124	224	324	424
131	231	331	431
132	232	332	432
133	233	333	433
134	234	334	434
141	241	341	441
142	242	342	442
143	243	343	443
144	244	344	444

Anmerkung. Hier scheint es zwar, als ob die Variationsformen, z. B. 112, 121, 211, permutierte Kombinationen mit Wiederholung wären. In formeller Hinsicht sind sie es auch, allein in materieller Hinsicht sind sie an Inhalt wirklich verschieden; denn nach vorhergehender Bestimmung bedeutet in 112 die erste Stelle das erste Element der ersten Reihe; die zweite Stelle das erste Element der zweiten Reihe und die dritte Stelle das zweite Element aus der dritten Reihe. Es ist nämlich $112 = \mathrm{A}a\beta$; ebenso ist $121 = \mathrm{A}b\alpha$; $211 = \mathrm{B}a\alpha$; $142 = \mathrm{A}d\beta$ &c.

20.

Aufgabe. Eine allgemeine Regel anzugeben, nach welcher man die Anzahl der möglichen Variationen aus einer gegebenen Anzahl Reihen berechnen kann.

Auflösung. Hat die erste der verschiedenen Reihen n, die zweite Reihe m Elemente, so läfst sich offenbar jedes der m Elemente mit jedem der n Elemente verbinden, was also $m.n$ Variationen gäbe. Hat nun die dritte Reihe p Elemente, so kann man wieder die mn Variationen mit jedem der p Elemente verbinden, was dann mnp Variationen giebt &c. Hat man also m verschiedene Reihen von je n Elementen, so ist die Anzahl aller Variationen $\overset{1}{\underbrace{n}} . \overset{2}{\underbrace{n}} \ldots\ldots \overset{m}{\underbrace{n}} = n^m$. In Zeichen

$$\overset{m}{\mathrm{V}}\,(1,2,3\ldots n) = n^m.$$

21.

In § 19 Anmerkung ist schon bemerkt worden, dafs die Anzahl aller Variationen aus m Reihen von je n Elementen (was wir durch $\overset{m}{\mathrm{V}}\,(1,2,3\ldots n)$ angedeutet) gleich ist der Anzahl der permutierten Kombinationen mit Wiederholung aus n Elementen zur $m$ten Klasse, was wir durch $\mathrm{p}\,\overset{m}{\mathrm{C}'}\,(1,2,3\ldots n)$

andeuten wollen. Dies giebt uns noch folgenden praktisch wichtigen Satz:

$$\overset{m}{\mathrm{V}}\ (1,2,3\ldots n) = \mathfrak{p}\ \overset{m}{\mathrm{C}}'\ (1,2,3\ldots n).$$

Kombination mit Wiederholung zu einer bestimmten Summe.

22.

Unter Kombination mit Wiederholung aus n Elementen zur $m$ten Klasse zur Summe s (in Zeichen ${}^{s}\overset{m}{\mathrm{C}}'$ [1,2,3 .... n]) versteht man: nur diejenigen dieser Kombinationen zu der geforderten Klasse anzugeben, worin die Quersumme der Elemente immer $= s$ ist. Aus ${}^{12}\overset{4}{\mathrm{C}}'$ (1,2,3 .... 9) hätte man z. B. unter andern: 1119, 1227, 1236 &c; denn $1 + 1 + 1 + 9 = 12$, $1 + 2 + 2 + 7 = 12$ &c. Um alle möglichen dieser Kombinationen zu finden (eine Aufgabe, welche zuweilen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommt und Discerptionsproblem genannt wird), wird man folgendes Verfahren beobachten: Man schreibe das niedrigste Element der Reihe so oft hin, als der Exponent der Klasse Einheiten hat, setze dann in die letzte Stelle von den übrigen Elementen ein solches (nötigenfalls das höchste), welches, zur Quersumme der vorhergehenden addiert, die verlangte Summe giebt. Kann selbst das höchste Element der Reihe diese Summe nicht hervorbringen, so mufs man mit der vorletzten und wenn nötig mit der vorvorletzten Stelle &c. so verfahren. Auf diese Weise erhält man zuerst die niedrigste Form. Hieraus folgen dann nach und nach die nächst höheren bis zur höchsten, mithin alle möglichen Formen, indem man (wie folgende Beispiele zeigen) von einem höheren Element eine Einheit abnimmt und der vorhergehenden Stelle hinzulegt und dann die rechts folgenden Stellen, soweit möglich, mit g l e i c h e n Elementen besetzt und darauf achtet, dafs kein niedrigeres Element auf ein höheres folgt. Ebenso ist es leicht, die Kombinationen mit und ohne Wiederholungen zu einer bestimmten Summe zu bilden.

${}^{12}\overset{4}{C}'\,(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$;

1119
1128
1137
1146
1155
1227
1236
1245
1335
1344
2226
2235
2244
2334
3333

${}^{11}\overset{3}{C}'\,(1,2,3,4,5,6)$

146
155
236
245
335
344

${}^{11}\overset{3}{C}\,(1,2,3,4,5,6)$

146
236
245

Variationen zu bestimmten Summen.

23.

Weil, nach § 19, Anmerkung, die Variationen aus m verschiedenen Reihen von je n Elementen (wenn man sie aus den, allen Reihen gemeinschaftlichen Zeigern 1, 2, 3 ... n bildet) in formeller Hinsicht auch zum Vorschein kommen, wenn man aus den gemeinschaftlichen Zeigern 1, 2, 3 ... n alle möglichen Kombinationen mit Wiederholung zur $m$ten Klasse bildet und dann die erhaltenen Formen permutiert, so erhält man offenbar die Anzahl aller Variationen zu einer bestimmten Summe bequemer, indem man die Kombinationen mit Wiederholung zu dieser Summe bildet und dann die Permutationszahlen der erhaltenen Formen addiert. In Zeichen:

$${}^{s}\overset{m}{V}\,(1,\ 2,\ 3 \ldots n) = \mathfrak{p}\ {}^{s}\overset{m}{C}'\,(1,\ 2,\ 3 \ldots n)$$

24.

Aufgabe. Wie viele verschiedene Würfe sind mit drei Würfeln möglich und wie viele sind darunter, deren Augenzahl $= 12$ ist?

Auflösung. Denkt man sich den einen Würfel mit weifsen (w), den zweiten mit roten (r) und den dritten mit blauen (b) Nummern bezeichnet, so erhellt leicht, dafs z. B. die Würfe $\underset{wrb}{123}$; $\underset{rwb}{123}$; $\underset{rbw}{123}$ &c. als wirklich verschiedene betrachtet werden müssen. Wir haben hier also drei verschiedene Reihen von je 6 Elementen. Die Anzahl aller verschiedenen Würfe ist also: $\overset{3}{V}(1,2\ldots6)=6^3=216$. Weil ferner

$${}^{12}\overset{3}{V}(1,2,3,4,5,6)=\mathfrak{p}\,{}^{12}\overset{3}{C'}(1,2,3,4,5,6)$$

ist, so giebt es hier offenbar 25 verschiedene Würfe, deren Augenzahl $=12$ ist, denn die drei Formen 156, 246, 345 lassen jede 6, die Formen 255, 336 jede aber nur 3 Permutationen zu, und 444 kommt nur einmal vor.

156	6
246	6
255	3
336	3
345	6
444	1
	25

Aufgabe. Wie oft lässt sich 13 als Summe von 3 verschiedenen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe (1, 2, 3, 4 ....) darstellen?

Auflösung. Mit 8 verschiedenen Kombinationen, nämlich:

1, 2, 10	2, 3, 8
1, 3, 9	2, 4, 7
1, 4, 8	2, 5, 6
1, 5, 7	3, 4, 6

Anmerkung. Ist allgemein eine gegebene Zahl n (in vorstehender Aufgabe 13) als Summe von 2 oder auch 3 Zahlen der natürlichen Zahlenreihe darzustellen, so konnte bisher die Zahl der Kombinationen (in vorstehender Aufgabe 8) nicht in ein mathematisches Gesetz gebracht werden. Der Herausgeber der vorliegenden 9. Auflage hat jedoch das Gesetz für 2 und 3 Summanden aufgefunden und wird auch die Rechnung für 4 Summanden demnächst zum Abschluss bringen.

Für 2 Summanden ist die

$$\text{Zahl der Kombinationen} = \frac{n}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}(-1)^n;$$

für 3 Summanden

$$=\frac{n^2}{12}-\frac{n}{2}+\frac{17}{24}+\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{1}{6}(-1)^{2\cos(60^0 n)}.$$

Zweites Buch.

Binomischer Lehrsatz für ganze Exponenten.

25.

Die Buchstabenrechnung lehrt die Regeln, nach welcher man die entwickelte zweite und dritte Potenz von einer beliebigen zweiteiligen Gröſse (Binom) gleich aus dem Gedächtnis hinschreiben kann, nämlich:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Es kommt nun aber auch häufig vor, daſs man eine viel höhere Potenz von einem Binom zu entwickeln hat, was durch unmittelbare wiederholte Multiplikation offenbar sehr mühsam und langwierig sein würde. Da nun aber die entwickelte Potenz z. B. von $(a+b)^{10}$ gewiſs nicht willkürlich, sondern durch den Potenzexponenten im voraus bestimmt ist, so muſs offenbar auch ein allgemeines Gesetz (Formel) existieren, nach welchem man die Entwickelung gleich fertig hinschreiben kann. Es entsteht deshalb die Aufgabe, dieses Gesetz zu entdecken und aufzustellen.

26.

Nehmen wir zuerst an, es solle aus verschiedenen zweiteiligen Faktoren, z. B. aus sechs: $(a+b)$, $(c+d)$, ... das Produkt entwickelt werden. Schreibt man diese sechs Faktoren untereinander und setzt darüber den gemeinschaftlichen Zeiger

1, 2, so könnte man das verlangte Produkt, zufolge § 18, Anmerkung, durch Variation finden. Es wäre dann, indem man in den erhaltenen Variationen, statt der Zeiger 1, 2, die ihnen und ihren Plätzen entsprechenden Elemente setzt: 111111 soviel als *acegil;* ferner 111112 = *acegim;* 111121 = *acegkl* &c. Es ist hier nämlich 111121 nicht als Permutation von 111112 anzusehen, indem die Zeiger 1 und 2 an verschiedenen Plätzen verschiedene Bedeutung haben. Wären aber, worauf es hier nur ankommt, die 6 zweiteiligen Faktoren einander gleich $(a+b)$, so würde der Zeiger 1, an welchem Platze in einer Variationsform er auch stehen möge, immer a und ebenso der Zeiger 2 immer b bedeuten und die Variationsformen 111112, 111121, 111211 &c. wären dann an Inhalt gleich (nämlich jede $= a^5b$) und als wirkliche Permutation der Kombination 111112 anzusehen. Ebenso wären dann 111122, 111212, 111221, 112112 &c. jede $= a^4b^2$. In diesem Falle also, wo die sechs zweiteiligen Faktoren alle gleich sind, erhält man das Produkt derselben, d. i $(a+b)^6$ weit kürzer, wenn man, wie nachstehend angedeutet, die Zeiger 1, 2 zur sechsten Klasse mit Wiederholung kombiniert und jede Form so oft nimmt, als ihre leicht zu berechnende Permutationszahl angiebt.

1 2
$a + b$
$c + d$
$e + f$
$g + h$
$i + k$
$l + m$

111111
111112
111121
111122
111211
111212
111221
⋮
222222

Die Form 111111 oder a^6 enthält sechs gleiche Elemente und kommt also nur einmal vor. Dasselbe gilt von der Form 222222 oder b^6. Die Formen 111112, 122222 oder a^5b, ab^5 enthalten jede unter ihren sechs Elementen fünf gleiche, jede Form kommt also $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5} =$ 6mal vor (§ 10).

Die beiden Formen 111122 und 112222 oder a^4b^2, a^2b^4, enthalten jede einmal vier und einmal zwei gleiche Elemente und jede kommt also $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.1.2} = \frac{6.5}{1.2}$ mal vor.

1 2
$a + b$
$a + b$
$a + b$
$a + b$
$a + b$
$a + b$

$111111 = a^6$
$111112 = a^5b$
$111122 = a^4b^2$
$111222 = a^3b^3$
$112222 = a^2b^4$
$122222 = ab^5$
$222222 = b^6$

Die Form 111222 $= a^3b^3$ kommt $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.3} = \frac{6.5.4}{3.2.1}$ mal vor, daher:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{6.5}{1.2}a^4b^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}a^3b^3 + \frac{6.5}{1.2}a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

27.

Aus vorstehendem § ist nun wohl klar geworden, dafs, wenn man allgemein das Produkt, aus n gleichen zweiteiligen Faktoren, d. i. die $n$te Potenz eines Binoms, $(a+b)^n$, zu entwickeln hat, darin die nebenstehend angedeuteten Formen a^n; $a^{n-1}b$; $a^{n-2}b^2$; $a^{n-3}b^3$; .... ab^{n-1}; b^n zum Vorschein kommen müssen und von welchen die erste und letzte Form nur einmal vorkommt. Bezeichnen wir die Koeffizienten der übrigen Formen vorläufig mit $\overset{1}{B}$, $\overset{2}{B}$, $\overset{3}{B}$..., so hat man

$$\begin{array}{c} \overset{1}{\smile}\ \ \overset{2}{\smile} \\ a+b \\ a+b \\ a+b \\ \vdots \\ a+b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1111\ldots111 = a^n \\ 1111\ldots112 = a^{n-1}b \\ 1111\ldots122 = a^{n-2}b^2 \\ \quad\vdots \\ 1122\ldots222 = a^2b^{n-2} \\ 1222\ldots222 = ab^{n-1} \\ 2222\ldots222 = b^n \end{array}$$

$$(a+b)^n = a^n + \overset{1}{B}.a^{n-1}b + \overset{2}{B}.a^{n-2}b^2 + \ldots + \overset{r}{B}.a^{n-r}b^r + \ldots + \overset{n-1}{B}.ab^{n-1} + b^n$$

Die noch zu bestimmenden Koeffizienten $\overset{1}{B}$, $\overset{2}{B}$...., welche die Binomial-Koeffizienten heifsen, sind, wie schon bemerkt, nichts anderes, als die Permutationszahlen der Formen, vor welchen sie stehen, und deshalb leicht zu berechnen.

Jede Form a^n, $a^{n-1}b$ &c. enthält n Elemente, indem jede folgende Form ein a verliert und dafür ein b wieder aufnimmt.

Die Form a^n kommt nur einmal vor.

Die Form $a^{n-1}b$ enthält n Elemente, worunter $n-1$ gleiche, daher (§ 10)

$$\overset{1}{B} = \frac{1.2.3.4\ldots(n-2)\ (n-1)\ n}{1.2.3.4\ldots(n-2)\ (n-1)} = n.$$

Die folgende Form, $a^{n-2}b^2$, enthält wieder n Elemente, worunter einmal $n-2$ gleiche und einmal 2 gleiche, daher

$$\overset{2}{B}=\frac{1.2.3\ldots(n-2)\,(n-1)\,n}{1.2.3\ldots(n-2)\;.\;1\;.\;2}=\frac{n\;(n-1)}{1\;.\;2}.$$

Allgemein ist der $r$te Binomial-Koeffizient

$$\overset{r}{B}=\frac{1.2.3\ldots(n-r)\;(n-r+1)\;(n-r+2)\ldots(n-1)\;n}{1.2.3\ldots(n-r)\;\;.\;\;1\;\;.\;\;2\;\;\ldots\;\;r},$$

$$\overset{r}{B}=\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\;r}.$$

Folglich auch

$$\overset{r}{B}=\frac{n\;(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\;.\;2\;\;.\;\;.\;\;.\;\;r}\cdot\frac{(n-r)\;(n-r-1)\ldots.(r+2)\;(r+1)}{(r+1)\;(r+2)\ldots.(n-r-1)\;(n-r)}$$

$$=\frac{n\;(n-1)\ldots\ldots(r+1)}{1\;.\;2\;\ldots\ldots\;(n-r)}$$

oder
$$\overset{r}{B}=\overset{n-r}{B};\text{ z. B. }\overset{n-1}{B}=\overset{1}{B},\;\overset{n-2}{B}=\overset{2}{B}.$$

Die Koeffizienten, welche von Anfang und Ende gleichweit abstehen, sind also einander gleich und man braucht deshalb dieselben nur bis zum mittelsten Gliede zu berechnen und die folgenden in umgekehrter Ordnung nur wieder abzuschreiben. (Vergl. die Anmerk. zu § 13.)

Daher ist nun, weil n eine ganze Zahl ist, ganz allgemein*)

$$(a+b)^n=a^n+n.a^{n-1}b+\frac{n.n-1}{1\;.\;2}a^{n-2}b^2+\frac{n.n-1.n-2}{1\;.\;2\;.\;3}a^{n-3}b^3+\ldots+n.ab^{n-1}+b^n$$

28.

Wir fügen vorstehender wichtigen Formel noch ein paar sich von selbst aufdringende Bemerkungen hinzu:

1. Die $n$te Potenz eines Binoms hat allemal $n+1$ Glieder.

2. Ist der eine Teil des Binoms, z. B. b, negativ, so sind natürlich alle diejenigen Glieder in der Entwickelung negativ,

---

*) Diese zuerst von Newton gefundene Binomialformel, von der wir in der Folge zeigen werden, dafs sie unter Umständen auch für gebrochene und negative Exponenten gültig ist, soll Newton zu Ehren auf seinem Denkmal, in der Westminster-Abtei, eingegraben sein; sie ist in der That so wichtig, dafs man sie mit Recht das Fundament der ganzen höhern Mathematik nennt.

in welchen b in einer ungeraden Potenz erscheint. So ist z. B.

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

29.

Aufgabe. Man entwickele nach der Binomialformel folgende Potenzen: $(a+b)^7$; $(1+x)^n$; $(x+1)^n$; $(a+b)^{n+1}$.

Auflösung. Man hat

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7,$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots + nx^{n-1} + x^n,$$

$$(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3} + \ldots + nx + 1,$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)a^nb + \frac{(n+1).n}{1 \cdot 2}a^{n-1}b^2 + \frac{(n+1)n.(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-2}b^3 + \ldots + (n+1)ab^n + b^{n+1}.$$

30.

Da die Binomialformel

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$$

für jeden Wert von a und b gültig ist, so kommt, wenn man $a=1$ und $b=1$ setzt, $(1+1)^n$, nämlich:

$$2^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + 1$$

und hieraus

$$2^n - 1 = \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + 1$$

Zufolge § 12 drückt das Glied $\frac{n}{1}$ die Anzahl aller möglichen Kombinationen aus n Elementen zur ersten Klasse aus, das folgende Glied $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}$ die Anzahl der Kombinationen zur zweiten Klasse &c. Es ist mithin die Anzahl aller Kombinationen aus n Elementen zu allen möglichen: ersten, zweiten, dritten &c. bis $n$ten Klasse $= 2^n - 1$.

31.

Setzt man in der Binomialformel $a=1$ und $b=-1$, so kommt $(1-1)^n$, nämlich:

$$0=1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}-\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+-\ldots\pm 1$$

und hieraus

$$1=\frac{n}{1}-\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}+\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}-+\ldots\mp 1.$$

Hier drückt die Summe der positiven Glieder der rechten Seite die Anzahl der Kombinationen zu allen möglichen ungeraden und die Summe der negativen Glieder die Anzahl der Kombinationen aller geraden Klassen aus n Elementen aus. Die Anzahl aller ungeraden Kombinationen aus n Elementen ist also immer um eine Einheit gröfser, als die Anzahl aller geraden Kombinationen. Dies ist ein merkwürdiges Faktum der Rechnung. Greift man blindlings in einen beliebigen Haufen gleicher Elemente (z. B. gleicher Geldstücke, Kugeln &c.), so ist es nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung wahrscheinlicher, eine ungerade als eine gerade Anzahl in der Hand zu haben.

32.

Addiert man die beiden gefundenen Gleichungen

$$2^n-1=\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}+\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots.+1$$

$$1=\frac{n}{1}-\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}+\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}-+\ldots\mp 1,$$

so erhält man

$$\frac{2^n}{2}=2^{n-1}=\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots..,$$

folglich ist die Anzahl der Kombinationen aller ungeraden Klassen aus n Elementen $=2^{n-1}$ und mithin die aller geraden Klassen $=2^{n-1}-1$ (weil ja, § 31, die Anzahl aller ungeraden Klassen um eine Einheit gröfser ist, als die der geraden).

33 a.

In Bezug auf die Binomial-Koeffizienten lassen sich mehrere merkwürdige Beziehungen entwickeln, wir nehmen aber nur die drei in § 33a bis § 33c auf, da dieselben in der Folge unentbehrlich werden.

Entwickelt man mehrere aufeinander folgende Potenzen eines Binoms, z. B.:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

so zeigt sich, dafs allgemein die Summe des $r$ten und $r+1$ten Koeffizienten irgend einer Potenz gleich ist dem $r+1$ten Koeffizienten der nächst folgenden Potenz. Deutet man den $r$ten Koeffizienten der $n$ten Potenz durch $\binom{n}{r}$, gelesen „n über r“, den $r+1$ten Koeffizienten derselben Potenz durch $\binom{n}{r+1}$ und durch $\binom{n+1}{r+1}$ den $r+1$ten Koeffizienten der $n+1$ten Potenz an, so ist

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$

Es ist nämlich nach § 27

$$\binom{n}{r} = \frac{n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,(n-3)\,...\,(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,...\,r},$$

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,.....\,(n-r+1)\,(n-r)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.....\,r\,.\,(r+1)}.$$

Addiert man diese beiden Koeffizienten, indem man gleich den ersten als gemeinschaftlichen Faktor heraussetzt, so ist

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2\,..\,(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,r}\left(1+\frac{n-r}{r+1}\right)$$

$$= \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2\,...\,(n-r+1\,.\,(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,r\,(r+1)}$$

$$= \frac{n+1\,.\,n\,.\,n-1\,.\,n-2\,...\,(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,...\,(r+1)}.$$

Letzterer Ausdruck ist offenbar der $(r+1)$te Koeffizient von $(a+b)^{n+1}$, mithin der behauptete Lehrsatz bewiesen.

33 b.

Lehrsatz. $\binom{1}{r+1} = 0.$

Beweis.
$$\binom{1}{r+1} = \frac{1\ (1-1)\ (1-2)\ \ldots\ (1-r)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ (r+1)}$$
$$= \frac{1\,.\,0\,.\,(-1)\ \ldots\ (1-r)}{1\,.\,2\,.\,3\ \ldots\ (r+1)}$$
$$= 0.$$

33 c.

Lehrsatz. $\binom{1}{r} + \binom{2}{r} + \binom{3}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$

Beweis. Nach § 33 a ist $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$, folglich $\binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1}$ und hiernach ist

$$\binom{1}{r} = \binom{2}{r+1} - \binom{1}{r+1}$$
$$\binom{2}{r} = \binom{3}{r+1} - \binom{2}{r+1}$$
$$\binom{3}{r} = \binom{4}{r+1} - \binom{3}{r+1}$$
$$\vdots$$
$$\binom{n-1}{r} = \binom{n}{r+1} - \binom{n-1}{r+1}$$
$$\binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1}$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergiebt sich

$$\binom{1}{r} + \binom{2}{r} + \binom{3}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{1}{r+1}$$
$$= \binom{n+1}{r+1} - 0 \text{ [s. § 33 b]}$$
$$= \binom{n+1}{r+1}.$$

33 d.

Hier mag noch eine elementare Ableitung des binomischen Lehrsatzes (von R. Schurig) Raum finden.*)

Man entwickele aus $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ durch Multipli-

*) Vergl. Lehrbuch der Arithmetik von R. Schurig, 2. Teil, § 62, 7.

kation mit $a+b$: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ u. s. w. So ergeben sich als Koeffizienten

für die 10. Potenz: 1, 10, 45, 120, 210, ...
„ „ 12. „ 1, 12, 66, 220, 495, ...

Zunächst ist ersichtlich, dafs

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + (\ldots)\,a^{n-2}b^2 + (\ldots)\,a^{n-3}b^3 + \ldots.$$

Nach dem Satze $A = B \cdot \frac{A}{B}$ lassen sich nun die noch fehlenden Koeffizienten (...) bestimmen. Es ist nämlich

der 3. Koeffizient $= 2.$ Koeffizient $\times \frac{3.\ \text{Koeffizient}}{2.\ \text{Koeffizient}}$;

für die 10. Potenz $45 = 10 \cdot \frac{45}{10} = 10 \cdot \frac{9}{2}$

„ „ 12. „ $66 = 12 \cdot \frac{66}{12} = 12 \cdot \frac{11}{2}$.

Der 4. Koeffizient $= 3.$ Koeffizient $\times \frac{4.\ \text{Koeffizient}}{3.\ \text{Koeffizient}}$;

für die 10. Potenz $120 = 45 \cdot \frac{120}{45} = 10 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{8}{3}$,

„ „ 12. „ $220 = 66 \cdot \frac{220}{66} = 12 \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{10}{3}$ u. s. w.

Mithin sind die Koeffizienten

der 10. Potenz $= 1,\ 10,\ \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2},\ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3},\ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \ldots$

der 12. Potenz $= 1,\ 12,\ \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2},\ \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots$

und durch Induktion ergeben sich die Koeffizienten der n. Potenz: $1,\ n,\ \frac{n\,(n-1)}{2},\ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots$

Drittes Buch.

Arithmetische Reihen höhern Ranges.

34.

In der Einleitung zur höhern Geometrie ist der hier als bekannt vorauszusetzende Begriff einer veränderlichen Gröfse, sowie auch der Begriff Funktion einer veränderlichen Gröfse gegeben und durch Beispiele erläutert worden (pag. 14). Auch ist daselbst schon die Einteilung aller Funktionen in transscendente und algebraische erwähnt. Wenn nämlich in einer Funktion von x die veränderliche Gröfse x als Exponent, Logarithmus oder auch als Bogen oder Winkel vorkommt, z. B. a^x, log x, sin x &c., so heifsen solche Funktionen transscendente, alle übrigen dagegen heifsen algebraische.*)

Die algebraischen Funktionen heifsen rational, wenn die veränderliche Gröfse mit keinem Wurzelzeichen oder gebrochenen Exponenten behaftet ist. Ist dies aber der Fall, so heifsen sie irrational.

Die algebraischen rationalen Funktionen heifsen kurzweg: ganze Funktionen, wenn die veränderliche Gröfse darin nicht als Divisor vorkommt; ist dies aber der Fall, so heifsen sie

*) Diese bisher allgemein gültigen, aber unlogischen Definitionen für „algebraische und transscendente Funktionen und Gleichungen" glaubt der Bearbeiter dieser Auflage durch die nachstehenden ersetzen zu müssen.

Ein aus einer endlichen Anzahl von Gliedern der Form ax^r bestehender Ausdruck ist ein algebraischer; ein transscendenter dagegen, wenn sich derselbe nur als eine unendliche Reihe von Gliedern jener Form darstellen läfst, wie es bei a^x, $lg\ x$, sin x u. s. w. der Fall ist. (Vergl. Lehrbuch der Arithmetik von R. Schurig, 3. Teil, § 76, 1.)

gebrochene Funktionen und zwar echt gebrochen, wenn die veränderliche Gröfse im Nenner einen höhern Exponenten hat als im Zähler. So ist z. B. $\frac{a+bx+cx^2}{\alpha+\beta x^3}$ eine echt gebrochene, $\frac{a+bx^2}{\alpha+\beta c+\gamma x^2}$ dagegen eine unecht gebrochene Funktion.

Die ganzen Funktionen unterscheidet man ferner nach Graden, welche der höchste Exponent angiebt, $a+bx+cx^2$; $a+cx^2$; cx^2 sind z. B. alle drei vom zweiten Grade.

Eine Funktion heifst eine gerade Funktion, wenn sie für gleiche entgegengesetzte Werte der veränderlichen Gröfse vollkommen gleiche Resultate giebt. Solche sind z. B. $a+bx^2+cx^4$, $\cos x$, c^{xx}, r^2-x^2 &c., denn ob hierin $x=h$ oder $x=-h$ genommen wird, man erhält doch dasselbe Resultat. Diejenigen Funktionen dagegen, welche für gleiche entgegengesetzte Werte der veränderlichen Gröfse gleich grofse, aber entgegengesetzte Resultate geben, heifsen ungerade Funktionen. Solche sind z. B. $ax+bx^3+cx^5$, $\sin x$ &c.

Wenn schliefslich für keinen endlichen Wert einer veränderlichen Gröfse der Betrag der daraus gebildeten Funktion weder unendlich noch imaginär wird, so heifst die Funktion stetig (kontinuierlich), sonst unstetig (diskontinuierlich). Unstetig sind z. B. $\sqrt{x^2-a^2}$, $\frac{a}{x^3}$, $\frac{a}{x-b}$, weil erstere für alle Werte von x, die kleiner als a sind, also zwischen den Grenzen von $x=0$ bis $x=\underline{+}a$ imaginär, die zweite für $x=0$ und die dritte für $x=b$ unendlich wird.

35.

Sei nun y irgend eine Funktion von x; in Zeichen $y=\varphi(x)$, so ist in der höhern Geometrie gezeigt, dafs eine Funktion zweier veränderlichen Gröfsen, wenn man darin die absolut veränderliche sich stetig ändern läfst, eine geometrische Bedeutung hat, nämlich (im allgemeinen) irgend eine Linie darstellt.

Lassen wir nun aber in der Funktion, $y=\varphi(x)$, die absolut veränderliche Gröfse x nicht stetig sich ändern, sondern sprungweise und zwar immer um gleiche Intervalle, z. B. $x=1, 2, 3, 4\ldots$ und berechnen den jedesmaligen Betrag der

Funktion, so erhält dieselbe eine rein arithmetische Bedeutung. Sie stellt dann keine Linie, sondern eine Reihe von Zahlen dar, die wie die entsprechende Linie begrenzt sein, oder auch ins Unendliche fortlaufen, sowie auch für gewisse Werte von x unterbrochen sein kann.

36.

In geometrischer Hinsicht heifst $\varphi(x)$ das Gesetz, nach welchem die räumliche Gröfse sich bildet, und wir wissen, dafs diese an Gestalt und Eigenschaften dadurch vollkommen bestimmt ist. Ebenso kann man in arithmetischer Hinsicht sagen, dafs durch $\varphi(x)$ die daraus entspringende Reihe von Zahlen im voraus samt allen ihren etwaigen Merkwürdigkeiten vollkommen bestimmt ist und die $\varphi(x)$ deshalb das Gesetz (allgemeine Glied) der daraus entspringenden Zahlenreihe nennen, und es ist klar, dafs jede andere Funktion von x (im allgemeinen) eine andere Reihe von Zahlen giebt, und $\varphi(x)$ also auch eine unerschöpfliche Quelle von Zahlenreihen darstellt.

37.

Wir können diese Vergleichung der Arithmetik mit der Geometrie noch weiter fortsetzen, denn so unähnlich sie in jeder andern Hinsicht sind, so haben sie doch in ihrem Zweck und Wesen eine gewisse Ähnlichkeit.

So wie nämlich die höhere Geometrie aus der willkürlich aufgeworfenen Funktion $y = \varphi(x)$ das darin enthaltene Bild und dessen Merkwürdigkeiten darzustellen sucht, sowie auch aus einer mechanischen Entstehungsweise oder gegebenen Eigenschaften einer räumlichen Gröfse ihr eigentliches (arithmetisches) Gesetz aufsucht, aus welchem alle übrigen Eigenschaften, sowie die Rektifikation und Quadratur derselben gefunden werden kann, so soll dagegen die Analysis in ähnlicher Weise die in der willkürlich aufgeworfenen Funktion, $y = \varphi(x)$, enthaltene Zahlenreihe, sowie alle ihre Merkwürdigkeiten darstellen und umgekehrt, wenn eine auf andere Weise gebildete Zahlenreihe gegeben ist, z. B. die mittleren täglichen Thermometer- oder Barometerstände &c., das darin herrschende allgemeine Gesetz

aufsuchen, nach welchem jedes beliebige Glied der Reihe bestimmt, sowie auch die etwaigen Eigenschaften der Reihe, die Summe einer bestimmten Anzahl Glieder &c., gefunden werden kann.

38.

Nichts in der Natur ist gesetzlos, und um die mannigfachen Erscheinungen erklären und voraussagen zu können, kommt es nur darauf an, die Gesetze, nach welchen die Natur wirkt, zu entdecken. Die Forschungen nach Naturgesetzen führen aber fast immer auf räumliche Gestalten oder auf Zahlenreihen, in welchen sie liegen. Deshalb gewährt auch die Spekulation über räumliche Gröfsen und Zahlenreihen nicht allein wissenschaftliches, sondern auch praktisches Interesse. Die Zahlenreihen sind besonders für die Experimental-Physik von grofser Wichtigkeit, weil man durch dieselben eine veränderliche, aber deshalb nicht zufällige Erscheinung unter einem sich immer gleich bleibenden Gesetze aufzufassen sucht.

Die Betrachtung der Zahlenreihe hat auf manche glückliche Entdeckung in der Mathematik selbst geführt. Leibnitz und Newton sind dadurch auf die Erfindung und Begründung der Differential- und Integralrechnung gekommen. Ohne Kenntnis der Zahlenreihen würde Babbage seine merkwürdige Rechenmaschine nicht erfunden haben.

39.

Da es unzählige verschiedene Funktionen von einer veränderlichen Gröfse und mithin auch unzählig viele Zahlenreihen giebt, so ist es offenbar unthunlich, jede besondere Zahlenreihe mit einem besonderen Namen zu benennen. Wir müssen deshalb, um Ordnung zu erhalten, die verschiedenen Zahlenreihen in Klassen zu bringen suchen, wovon jede eine ganze Sippschaft begreift, und hierzu verhilft uns die § 34 erwähnte Einteilung der verschiedenartigen Funktionen. Denn es läfst sich mutmafsen, dafs Reihen, welche aus einerlei Art Funktionen entspringen, bei all ihrer sonstigen Verschiedenheit, dennoch ähnliche Merkmale besitzen werden.

Wir betrachten deshalb zuerst die einfachste Art Reihen, deren Bildungsgesetz eine ganze Funktion ist und mithin die Form: $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots$ hat (§ 34). So wie man nun übereingekommen ist, alle Linien, die aus einer ganzen Funktion entspringen, kurzweg parabolische Linien zu nennen*) und sie nur nach dem durch den höchsten Exponenten von x bestimmten Grade zu unterscheiden, so ist man ebenfalls übereingekommen, alle aus solchen ganzen Funktionen hervorgehende Reihen kurzweg arithmetische Reihen zu nennen und sie blofs nach dem Range ihrer Funktion zu unterscheiden.

40.

Um das Vorhergehende zuerst durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, sei

$$y = 2x^3 - x + 1.$$

Setzen wir für die absolut veränderliche Gröfse x nach und nach die aufeinander folgenden Zahlen 0, 1, 2, 3......, welche zugleich die Zeiger (Stellenzahlen, Indices) der entsprechenden Glieder andeuten, so erhalten wir folgende Reihe, welche der gegebenen Erklärung zufolge eine arithmetische Reihe dritten Ranges ist:

$$\underset{1,}{\overset{0}{\smile}}\quad \underset{2,}{\overset{1}{\smile}}\quad \underset{15,}{\overset{2}{\smile}}\quad \underset{52,}{\overset{3}{\smile}}\quad \underset{125,}{\overset{4}{\smile}}\quad \underset{246\ldots.}{\overset{5\ldots.}{\smile}}$$

Betrachten wir nun diese Reihe, so scheint auf den ersten Blick die gröfste Unregelmäfsigkeit darin zu herrschen. Gleichwohl wissen wir, dafs kein blinder Zufall die Glieder derselben zusammengewürfelt hat, vielmehr jedes derselben nach einem und demselben Gesetze $\varphi(x) = 2x^3 - x + 1$ entsprungen ist und dafs jeder, der dieses Gesetz kennt, im stande ist, jedes andere Glied sofort zu bestimmen. Wollen wir z. B. das zehnte Glied, so ist dieses $= 2 . 10^3 - 10 + 1 = 1991$. Dieser Reihe, sowie allen übrigen arithmetischen Reihen sind offenbar nur willkürliche Grenzen zu setzen, d. h. wir können sie beliebig

*) Die gewöhnliche Parabel ist als spezieller Fall darin enthalten.

weit fortsetzen und zwar nach beiden Seiten, denn setzen wir statt x auch nach und nach -1, $-2\ldots$ so erhält man:

$$\ldots\ \overset{-3}{-50},\quad \overset{-2}{-13},\quad \overset{-1}{0},\quad \overset{0}{1},\quad \overset{1}{2},\quad \overset{2}{15},\quad \overset{3}{52},\quad \overset{4}{125}\ldots$$

Und eine solche nach beiden Seiten unbegrenzte Zahlenreihe könnte, im Fall sie das Gesetz irgend einer veränderlichen Naturerscheinung darstellte, ein Bild der Zeit sein. Von einer bestimmten Epoche aus könnte man sowohl vorwärts als rückwärts schauen und sehen, was war, ist und sein wird.

41.

Man kann aus dem bekannten Gesetze einer arithmetischen Reihe durch eine leichte Umformung ein anderes von gleichem Range für dieselbe Reihe ableiten, nach welchem jedes beliebige Glied derselben zum ersten wird. Die Funktion

$$y = 2x^3 - x + 1 \ldots\ldots\ldots (1)$$

giebt die Reihe:

$$\ldots \overset{-2}{-13},\quad \overset{-1}{0},\quad \overset{0}{1},\quad \overset{1}{2},\quad \overset{2}{15},\quad \overset{3}{52},\quad \overset{4}{125}\ldots$$

in welcher 2 das erste Glied ist, indem für $x = 1 : y = 2$ wird.

Um nun für dieselbe Reihe das Gesetz zu erhalten, nach welchem nicht 2, sondern 15 als erstes Glied erscheint, braucht man nur in Gleichung (1) $x + 1$ statt x zu setzen, so erhält man:

$$y = 2(x+1)^3 - (x+1) + 1 \ldots\ldots (2)$$

denn setzt man in (2) $x = 1$, so kommt offenbar dasselbe, als wenn man in (1) $x = 2$ setzt &c. Die Gleichung (2) oder, indem man die Klammern auflöst, die Gleichung:

$$y = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 2$$

giebt nun für $x = 0, 1, 2\ldots$, $y = 2, 15, 52\ldots$ Soll in obiger Reihe 52 das erste Glied sein, so würde man in (1) $x + 2$ statt x, und wenn 1 das erste Glied sein soll, $x - 1$ statt x setzen &c. (Vergl.: Höhere Geometrie § 68.)

42.

Liegt nun irgend eine gesetzmäfsige Reihe von Zahlen vor uns, so können wir aus derselben sogenannte Differenzreihen bilden, indem wir jedes Glied von dem nächstfolgenden abziehen.

Die aufeinander folgenden Differenzen bilden dann eine andere Zahlenreihe, welche die erste Differenzreihe heifst. Mit dieser können wir dann ebenso, wie mit der gegebenen oder sogenannten Hauptreihe verfahren und erhalten dann die zweite Differenzreihe &c.

Sei z. B. das Gesetz oder allgemeine Glied der Hauptreihe

$$y = 2x^3 - x + 1,$$

so ist die

	1		2		3		4		5		6
Hauptreihe......	2,		15,		52,		125,		246,		427..
I. Differenzreihe..		13,		37,		73,		121,		181..	
II. „ ..			24,		36,		48,		60..		
III. „ ..				12,		12,		12..			

43.

Es ist klar, dafs alle Differenzreihen durch die Hauptreihe im voraus bestimmt, und wenn auch nach andern Gesetzen gebildet, so doch gesetzmäfsig sein werden und dafs die Gesetze (allgemeinen Glieder), nach welchen sie entspringen, aus dem Gesetze für die Hauptreihe sich müssen ableiten lassen. Um z. B. aus dem allgemeinen Gliede, der Hauptreihe des vorigen Paragraphen, nämlich

$$y = 2x^3 - x + 1,$$

das allgemeine Glied der ersten Differenzreihe, welches wir mit $\triangle y$ bezeichnen wollen, zu finden, überlege man die Sache so: Subtrahiert man das erste Glied der Hauptreihe von dem zweiten, so erhält man das erste Glied der ersten Differenzreihe. Subtrahiert man das zehnte Glied der Hauptreihe vom elften, so erhält man das zehnte Glied der ersten Differenzreihe &c. Setzt man also in dem allgemeinen Gliede der Hauptreihe $2x^3 - x + 1$ einmal $x = 100$ und dann $x = 101$ und subtrahiert das erste Resultat vom zweiten, so erhält man offenbar das hundertste Glied der ersten Differenzreihe

$$= 2 \,.\, 101^3 - 101 + 1 - (2 \,.\, 100^3 - 100 + 1)$$

und wenn man statt 100 und 101 ganz allgemein x und $x+1$ setzt, so erhält man offenbar das $x$te (allgemeine) Glied der

1ten Differenzreihe, welches wir mit $\triangle y$ bezeichnen, so dafs also

$$\triangle y = 2(x+1)^3 - (x+1) + 1 - (2x^3 - x + 1)$$

oder, die Klammer aufgelöst,

$$\triangle y = 6x^2 + 6x + 1$$

das allgemeine Glied der ersten Differenzreihe. Diese ist also wieder eine arithmetische Reihe und zwar von einem Range niedriger. Setzt man hierin $x = 1, 2, 3 \ldots$, so kommt die Reihe: 13, 37, 73 ...

Da man nun offenbar auch allgemein das $x$te Glied der zweiten Differenzreihe erhält, wenn man das $x$te Glied der ersten Differenzreihe vom $x+1$ten subtrahiert, so ist, indem wir das Resultat mit $\triangle^2 y$ bezeichnen:

$$\triangle^2 y = 6(x+1)^2 + 6(x+1) + 1 - (6x^2 + 6x + 1).$$

Es ist also

$$\triangle^2 y = 12x + 12$$

das allgemeine Glied der zweiten Differenzreihe, welche also wiederum von einem Range niedriger, nämlich vom ersten Range, also die gewöhnliche (gemeine) arithmetische Progression ist. Setzt man $x = 1, 2, 3 \ldots$, so kommt die Reihe: 24, 36, 48 ... Subtrahiert man wieder das $x$te Glied der zweiten Differenzreihe vom $x+1$ten, so erhält man das allgemeine Glied der dritten Differenzreihe, nämlich

$$\triangle^3 y = 0 \,.\, x + 12 = 12.$$

Diese Betrachtungen führen uns auf folgenden merkwürdigen Satz:

44.

Lehrsatz. Jede arithmetische Reihe vom $n$ten Range (oder von der n. Ordnung) giebt immer n und nur n Differenzreihen. Unter den Gliedern der $n$ten Differenzreihe giebt es nämlich keine Differenzen mehr, sie sind alle einander gleich und zwar gleich der vollen Permutationszahl aus dem höchsten Exponenten der veränderlichen Gröfse, multipliziert mit dem konstanten Koeffizienten, womit die höchste Potenz im allgemeinen Gliede behaftet ist. In Zeichen: wenn

$$y = Ax^n + B\,{}^p + \ldots + T \ldots$$

das allgemeine Glied der Hauptreihe und n der gröfste Exponent ist, so hat diese Reihe, was auch die übrigen auf das höchste Glied Ax^n folgenden niedrigeren Glieder sein mögen, immer n Differenzreihen und in der $n$ten (letzten) Differenzreihe ist jedes Glied $= 1.2.3.4 \ldots . n . A$.

Beweis. Subtrahiert man das $x$te Glied vom $x+1$ten, so erhält man das $x$te (allgemeine) Glied der 1ten Differenzreihe, nämlich

$$\triangle y = A(x+1)^n + B(x+1)^p + \ldots + T - (Ax^n + Bx^p + \ldots + T)$$

oder entwickelt [weil nach § 29 $(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \ldots$]

kürzer: $\triangle y = nAx^{n-1} + B_1x^{n-2} + \ldots + T_1$.

Die hier auf das höchste Glied, $n . Ax^{n-1}$, folgenden niedrigern Glieder B_1x^{n-2} &c. brauchen wir für die Beweisführung nicht zu kennen, indem sie (weil zuerst herausfallend) auf die fragliche allerletzte Differenzreihe keinen Einflufs haben können.

Aus dem gefundenen höchsten Gliede $n . Ax^{n-1}$ des Gesetzes für die erste Differenzreihe könnte man nun auf dieselbe Weise das höchste Glied des Gesetzes für die zweite Differenzreihe ableiten. Man sieht aber leicht, dafs man dies viel kürzer erhalten kann. Denn so wie aus dem höchsten Gliede für die Hauptreihe, $Ax^n + \ldots + T$, das höchste Glied der ersten Differenzreihe entspringt, indem man den Koeffizienten A mit dem Exponenten der veränderlichen Potenz multipliziert und diese Potenz um eine Einheit verringert, nämlich: nAx^{n-1}, so mufs offenbar aus diesem höchsten Gliede für die erste Differenzreihe, indem wir nur diesen Schlufs wiederholen, das höchste Glied für die zweite Differenzreihe entspringen, nämlich: $(n-1) . nAx^{n-2}$ &c. Mithin ist

$$\triangle^2 y = (n-1) . nAx^{n-2} + B_2x^{n-3} + \ldots$$
$$\triangle^3 y = (n-2) . (n-1) . nAx^{n-3} + \ldots$$
$$\vdots$$
$$\triangle^{10} y = (n-9)(n-8) \ldots (n-1) nAx^{n-10} + \ldots \text{ d. i.}$$
$$\triangle^{10} y = [n-(10-1)][n-(10-2)] \ldots (n-1) nAx^{n-10} + \ldots, \text{ folglich}$$
$$\vdots$$
$$\triangle^{n-1} y = [n-(n-1-1)][n-(n-1-2)] \ldots (n-1) nAx^{n-(n-1)}, \text{ oder}$$
$$\vdots$$
$$\triangle^{n-1} y = 2.3.4 \ldots (n-1) nAx + T_{n-1}.$$

Es ist also $2.3.4 \ldots (n-1) nAx + T_{n-1}$ das allgemeine Glied

der $(n-1)$ten Differenzreihe, indem wir mit T_{n-1} den etwaigen konstanten Teil bezeichnen.

Subtrahiert man nun schliefslich das $x$te Glied der $(n-1)$ten Differenzreihe vom $x+1$ten, so erhalten wir das $x$te Glied der $n$ten Differenzreihe, nämlich

$$\triangle^n y = 2.3.4 \ldots . nA(x+1) + T_{n-1} - (2.3.4 \ldots . nAx + T_{n-1})$$

oder

$$\triangle^n y = 0.x + 1.2.3 \ldots . (n-1)nA.$$

Da nun dieses allgemeine Glied für die $n$te Differenzreihe kein x mehr enthält, indem für jeden Wert von $x = 1, 2, 3 \ldots .$ doch immer $0.x = 0$ ist, so ist klar, dafs jedes Glied der $n$ten Differenzreihe $= 1.2.3 \ldots . nA$ ist, wie der Lehrsatz behauptet.

45.

Der vorstehende Lehrsatz läfst sich noch allgemeiner so aussprechen: *)

Setzt man in einer ganzen Funktion $y = Ax^n + \ldots . + T$, für die veränderliche Gröfse x erst einen ganz beliebigen Wert, den wir mit x_0 bezeichnen wollen und dann immer um eine ganz beliebige Gröfse, h, mehr, d. h. setzen wir statt x nach und nach x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, $x_0 + 3h \ldots .$ (sowie auch abnehmend $x_0 - h$, $x_0 - 2h \ldots .$), so erhält man eine arithmetische Reihe, welche n Differenzreihen giebt. In der $n$ten (letzten) Differenzreihe ist dann jedes Glied $= 1.2.3 \ldots . nA . h^n$. **)

Nennen wir hier die Glieder der Hauptreihe, welche für $x = x_0 + 0.h, = x_0 + h, = x_0 + 2h \ldots .$ entspringen, das 0te, 1ste, 2te Glied &c., so erhält man offenbar das $r$te Glied der ersten

---

*) Dieser und der folgende 46. Paragraph hängen mit dem Folgenden nicht zusammen und können deshalb auch überschlagen werden.

**) Sei zur Erläuterung x^3 das allgemeine Glied und $x_0 = 3$, $h = 2$, setzen wir also statt x nach und nach 3, 5, 7, 9 …., so kommt:

	−3		−2		−1		0		1		2		3		4	
Hauptreihe ….	−27,		−1,		1,		27,		125,		343,		729,		1331 ….	
Differenzreihen:		26,		2,		26,		98,		218,		386,		602 ….		
			−24,		24,		72,		120,		168,		216 ….			
				48,		48,		48,		48 ………..						

und in der dritten (letzten) Differenzreihe ist jedes Glied, wie behauptet, $= 1.2.3.2^3 = 48$.

Differenzreihe, wenn man das $r$te Glied der Hauptreihe vom $r+1$ten subtrahiert. Um nun die allgemeine Richtigkeit des behaupteten Satzes einzusehen, setzen wir in das allgemeine Glied der Hauptreihe

$$y = Ax^n + Bx^p + \ldots. + T$$

statt x einmal $x+h$ und einmal x, und subtrahieren das letztere Resultat vom ersteren, so hat man für das $x$te (allgemeine) Glied der 1sten Differenzreihe den Ausdruck

$$\triangle y = A(x+h)^n + B(x+h)^p + \ldots. + T - (Ax^n + Bx^p + \ldots. + T) \ldots.. (1),$$

denn setzt man hierin nach und nach x_0+h, $x_0+2h \ldots.$ statt x, so ist das soviel, als wenn man das erste Glied der Hauptreihe vom zweiten, das zweite vom dritten,.... subtrahiert und man erhält also das erste, zweite .... Glied der ersten Differenzreihe, welche man mit $\triangle y_1$, $\triangle y_2 \ldots.$ bezeichnet. Der Ausdruck (1) giebt nämlich für $x = x_0 + h$:

$$\triangle y_1 = A(x_0+2h)^n + B(x_0+2h)^p + \ldots. + T - [A(x_0+h)^n + B(x_0+h)^p + \ldots + T]$$

und für $x = x_0 + 2h$:

$$\triangle y_2 = A(x_0+3h)^n + B(x_0+3h)^p + .. + T - [A(x_0+2h)^n + B(x_0+2h)^p + .. + T]$$

Reduzieren wir den obigen Ausdruck (1) auf seine kürzere Form, indem wir die Klammern auflösen, so ist:

$$\triangle y = A(x^n + nx^{n-1}h + . + h^n) + B(x^p + px^{p-1}h + .. + h^p) + . + T - (Ax^n + Bx^p + .. + T)$$

$$\triangle y = nAh . x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots. T_1.$$

Man sieht also, dafs das allgemeine Glied für die erste Differenzreihe von einem Range niedriger ist, als das der Hauptreihe. Wollte man dies allgemeine Glied genau kennen, so müfste man alle auf das höchste Glied $nAh . x^{n-1}$ folgenden niedrigeren, hier nur angedeuteten Glieder wirklich berechnen. Für die Beweisführung unseres Satzes ist dies aber nicht nötig, weil sie auf die $n$te (letzte) Differenzreihe keinen Einflufs haben.

Durch ein ähnliches Räsonnement, wie in § 44, ergeben sich nun die allgemeinen Glieder der 2ten, 3ten....$n$ten Differenzreihen, nämlich:

$$\triangle^2 y = (n-1)\, nAh^2 . x^{n-2} + \ldots.$$

$$\triangle^3 y = (n-2)(n-1)\, nAh^3 x^{n-3} + \ldots.$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\triangle^{n-1} y = 2 . 3 . 4 \ldots. nAh^{n-1} . x^1 + T_{n-1}$$

$$\triangle^n y = 1 . 2 . 3 \ldots. nAh^n.$$

Von Wichtigkeit für spätere Sätze wird zugleich der hier und schon in § 45 abgeleitete Satz, dafs in Bezug auf jede Reihe, also auch jede Differenzreihe, die nächstfolgende Differenzreihe einen Grad niedriger sein mufs. Ist also eine gegebene Reihe vom $n$ten Range, so ist die 1. Differenzreihe derselben eine Reihe $n-1$ten Ranges, die 2. Differenzreihe eine Reihe $n-2$ten Ranges u. s. w. Ist z. B. eine Reihe vom 3. Range, sind also die Glieder ihrer 3. Differenzreihe einander gleich, so mufs die 1. Differenzreihe eine Reihe 2. Ranges, die 2. Differenzreihe eine Reihe 1. Ranges sein.

46.

Aus vorstehendem Satze folgt, dafs, wenn man aus einer arithmetischen Reihe beliebig viele Glieder in gleichen Intervallen herauswirft, die übrigen Glieder dennoch eine arithmetische Reihe von demselben Range bilden.

Denn denkt man sich eine arithmetische Reihe gebildet, indem man in ihrem allgemeinen Gliede x_0, x_0+h, x_0+2h &c. statt x setzt und nimmt aus der Reihe zwischen je zwei Gliedern eins weg, so kann man sich die restierende Reihe aus demselben allgemeinen Gliede entstanden denken, indem man statt x nach und nach x_0, $x_0+1.2h$, $x_0+2.2h$.... und wenn man in gleichen Intervallen zwei Glieder weglässt, x_0, $x_0+1.3h$, $x_0+2.3h$.... gesetzt hat &c.

Ist z. B. x^2 das allgemeine Glied, $x_0=3$ und $h=1$, so hat man die Reihe:

$$\ldots\underbrace{9}_{0},\ \underbrace{16}_{1},\ \underbrace{25}_{2},\ \underbrace{36}_{3},\ \underbrace{49}_{4},\ \underbrace{64}_{5},\ \underbrace{81}_{6},\ \underbrace{100}_{7},\ \underbrace{121}_{8},\ \underbrace{144}_{9}\ldots$$

Läfst man vom 0ten Gliede an zwei Glieder ausfallen, so kommt die Reihe:

$$\begin{array}{c} 9,\quad 36,\quad 81,\quad 144\ldots \\ 27,\quad 45,\quad 63\ldots \\ 18,\quad 18=1.2.3^2 \end{array}$$

47.

Aufgabe. Es sind so viele Glieder einer a r i t h m e t i s c h e n Reihe gegeben, dafs der Rang derselben dadurch bestimmt werden kann; z. B.

$$\ldots -13,\ 0,\ 1,\ 2,\ 15,\ 52,\ 125\ldots$$

Man soll das allgemeine Glied derselben finden.

Auflösung. Die Reihe giebt drei Differenzreihen, nämlich:

13, 1, 1, 13, 37, 73, 121....

—12, 0, 12, 24, 36, 48....

12, 12, 12, 12, 12....

und da nun bestimmt ist, dafs die fragliche Reihe eine arithmetische sein soll, so mufs das allgemeine Glied derselben notwendig eine ganze Funktion vom dritten Grade sein, deren allgemeine Form

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ldots\ldots. (1)$$

Zufolge § 41 ist es gleichgültig, welches Glied in der Hauptreihe als das erste angenommen wird. Wir wollen deshalb das Glied 2 als erstes nehmen, mithin 1 als 0tes Glied. Dann müssen die in Gleichung (1) zu bestimmenden Koeffizienten a, b, c, d offenbar so beschaffen sein, dafs für $x = 0, 1, 2, 3\ldots.$ $y = 1, 2, 15, 52\ldots.$ wird. Dies gäbe dann zur Bestimmung von a, b, c, d vier Bedingungsgleichungen. Da aber jedes Glied der letzten Differenzreihe $= 12$, und, zufolge § 44, $1.2.3a = 12$ ist, so ist $a = \frac{12}{1.2.3} = 2$, und da aufserdem für $x = 0$, $y = 1$ sein mufs, so ist (weil für $x = 0$ die drei ersten Glieder in (1) auch $= 0$ sind) $d = 1$, und wir brauchen also, um auch noch die Koeffizienten b und c in dem schon näher bestimmten allgemeinen Gliede

$$y = 2x^3 + bx^2 + cx + 1$$

zu finden, nur zwei Bedingungsgleichungen aufzustellen. Nun ist für $x = 1$, $y = 2$, daher: $2 = 2 + b + c + 1$
und für $x = 2$, $y = 15$, daher $15 = 16 + 4b + 2c + 1.$

Hieraus folgt: $b = 0$ und $c = -1$. (Algebra § 160 bis 163.)

Mithin ist das gesuchte allgemeine Glied der vorgelegten Reihe:

$$y = 2x^3 - x + 1.$$

Soll nicht 2, sondern 1 das erste Glied sein, so ist das allgemeine Glied (§ 41)

$$y = 2\,(x-1)^3 - (x-1) + 1$$

$$\text{oder } y = 2x^3 - 6x^2 + 5x.$$

Aufgabe. Man sucht das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 13, $73\frac{5}{6}$, 243, $604\frac{1}{2}$....., in welcher $\frac{1}{3}$ das 0te, $\frac{1}{2}$ das erste Glied ist &c.

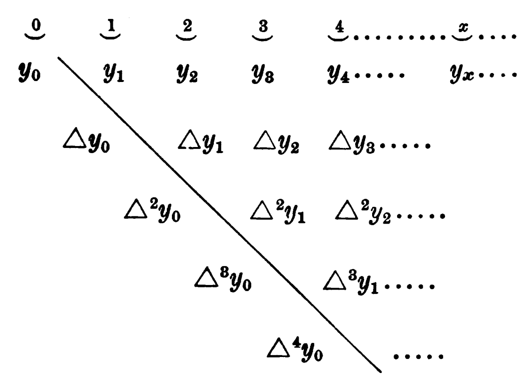
Antwort. Man findet $y = x^4 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{3}$.

Ebenso findet man $9x^2$ und $\frac{x^3}{1000}$ als die allgemeinen Glieder der arithmetischen Reihen: 9, 36, 81, 144.... und 0,001; 0,008; 0,027; 0,064; 0,125..., worin 9 und 0,001 die ersten Glieder sind.

48.

Aufgabe. *) Aus dem Anfangsgliede der Hauptreihe und jeder der sämtlichen Differenzreihen das allgemeine Glied der Hauptreihe zu finden.

Auflösung. Um eine allgemeine Formel und eine bequeme Zeichensprache zu erhalten, wollen wir die den Zeigern 0, 1, 2....x entsprechenden Glieder der Hauptreihe mit y_0, y_1, y_2....y_x bezeichnen, so dafs y_0, y_1, y_2.... das 0te, 1ste.... Glied bedeutet. Ebenso soll $\triangle y_0$, $\triangle y_1$ .... das 0te, 1ste.... Glied der ersten Differenzreihe und $\triangle^2 y_0$, $\triangle^2 y_1$.... das 0te, 1ste .... Glied der zweiten Differenzreihe bedeuten &c., so dafs also



die Hauptreihe und ihre sämtlichen Differenzreihen bedeuten.

---

*) Dieser und der folgende 49. Paragraph, sowie auch § 50, 2, können so lange ungelesen bleiben, bis darauf zurückgewiesen wird.

Nach den schon oben aufgestellten Definitionen ist nun

$$\begin{array}{lll}
\quad\quad 1 & \quad\quad 2 & \quad\quad 3 \\
y_1 - y_0 = \Delta y_0 & \Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0 & \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0 \\
y_2 - y_1 = \Delta y_1 & \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1 & \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1 \\
y_3 - y_2 = \Delta y_2 & \Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2 & \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
y_{r-1} - y_{r-2} = \Delta y_{r-2} & \Delta y_{r-1} - \Delta y_{r-2} = \Delta^2 y_{r-2} & \Delta^2 y_{r-1} - \Delta^2 y_{r-2} = \Delta^3 y_{r-2} \\
y_r - y_{r-1} = \Delta y_{r-1} & \Delta y_r - \Delta y_{r-1} = \Delta^2 y_{r-1} & \Delta^2 y_r - \Delta^2 y_{r-1} = \Delta^3 y_{r-1}
\end{array}$$

Durch Addition erhält man aus dem 1. System dieser Gleichungen:

$$y_r - y_0 = \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots\ldots + \Delta y_{r-1}.$$

Aus dem 2. System:

$$\Delta y_r - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \ldots\ldots + \Delta^2 y_{r-1}.$$

Aus dem 3. System:

$$\Delta^2 y_r - \Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0 + \Delta^3 y_1 + \Delta^3 y_2 + \ldots\ldots + \Delta^3 y_{r-1}.$$

Aus diesen 3 Gleichungen ergiebt sich:

$$y_r = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots\ldots + \Delta y_{r-1} \ldots\ldots \text{(A)}$$

$$\Delta y_r = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \ldots + \Delta^2 y_{r-1} \ldots\ldots \text{(B)}$$

$$\Delta^2 y_r = \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 + \Delta^3 y_1 + \Delta^3 y_2 + \ldots + \Delta^3 y_{r-1} \ldots\ldots \text{(C)}$$

Ist nun zunächst

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ldots y_n$$

eine arithmetische Reihe ersten Ranges, sind also die Glieder der 1. Differenzreihe (Δy_0, Δy_1, $\Delta y_2, \ldots$) einander gleich und setzt man jedes derselben $= \Delta y_0$, so geht (s. A.)

$$y_n = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots\ldots + \Delta y_{n-1}$$

über in

$$y'_n = y_0 + \overset{1}{\Delta y_0} + \overset{2}{\Delta y_0} + \overset{3}{\Delta y_0} + \ldots\ldots + \overset{n}{\Delta y_0},$$

folglich ist das $n+1$te Glied der gegebenen Reihe

$$y_n = y_0 + n\,\Delta y_0 \ldots\ldots \text{(I)}.$$

Ist die Reihe $y_0, y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$ eine arithmetische Reihe 2. Ranges, so bilden nach dem Schlufssatz von § 45 die Glieder der 1. Differenzreihe, d. i. die auf y_0 folgenden Glieder in

$$y_n = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots\ldots + \Delta y_{n-1} \text{ (s. A)}$$

eine arithmetische Reihe 1. Ranges, deren Differenzen gleich und zwar $= \Delta^2 y_0$ sind. Mithin geht (s. B):

$$\Delta y_r = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \ldots + \Delta^2 y_{r-1}$$

über in:

$$\triangle y_r = \triangle y_0 + \overset{1}{\smile}{\triangle^2 y_0} + \overset{2}{\smile}{\triangle^2 y_0} + \overset{3}{\smile}{\triangle^2 y_0} + \ldots + \overset{r}{\smile}{\triangle^2 y_0}, \text{ oder}$$

$$\triangle y_r = \triangle y_0 + r \,.\, \triangle^2 y_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{Y}).$$

Nun ist $y_0 = y_0$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle y_0 \quad = \triangle y_0 \\ \triangle y_1 \quad = \triangle y_0 + 1 \,.\, \triangle^2 y_0 \\ \triangle y_2 \quad = \triangle y_0 + 2 \,.\, \triangle^2 y_0 \\ \triangle y_3 \quad = \triangle y_0 + 3 \,.\, \triangle^2 y_0 \\ \quad \vdots \\ \triangle y_{n-1} = \triangle y_0 + (n-1)\, \triangle^2 y_0 \end{array}\right\}$$

und nach Y: (obige Gleichungen) — n Gleichungen, wie sich aus den Indices der linken Seite ergiebt.

Die Addition dieser Gleichungen giebt

$$y_0 + \triangle y_0 + \triangle y_1 + \triangle y_2 + \ldots + \triangle y_{n-1} = y_0 + n \,.\, \triangle y_0 + [1+2+\ldots+(n-1)] \triangle^2 y_0.$$

Hier ist die linke Seite $= y_n$ (s. A), die Reihe $1 + 2 + \ldots + (n-1)$ aber in der Form $\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \ldots + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{2}$ [s. § 33c], folglich ist das $n+1$te Glied der gegebenen Reihe

$$\left.\begin{array}{l} y_n = y_0 + n \,.\, \triangle y_0 + \binom{n}{2} \triangle^2 y_0 \text{ oder} \\ y_n = y_0 + n \,.\, \triangle y_0 + \dfrac{n(n-1)}{2} \triangle^2 y_0 \,. \end{array}\right\} \ldots . (\mathrm{II}).$$

Ist die gegebene Reihe $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ vom 3. Range, sind die Glieder der 3. Differenzreihe also einander gleich $(= \triangle^3 y_0)$ [s. den Schlufssatz von § 45], so bilden die Glieder der 1. Differenzreihe, d. i. die auf y_0 folgenden Glieder in

$$y_n = y_0 + \triangle y_0 + \triangle y_1 + \triangle y_2 + \ldots + \triangle y_{n-1} \text{ (s. A)}$$

eine arithmetische Reihe 2. Ranges, für welche das 1. Glied $= \triangle y_0$, das 1. Glied ihrer 1. Differenzreihe $= \triangle^2 y_0$, das 1. Glied ihrer 2. Differenzreihe (wie überhaupt jedes Glied derselben) $= \triangle^3 y_0$ ist, so dafs nach II:

$$\triangle y_n = \triangle y_0 + n \,.\, \triangle^2 y_0 + \binom{n}{2} \triangle^3 y_0 \ldots . (\mathrm{Z}).$$

Nun ist $y_0 = y_0$

$$\triangle y_0 = \triangle y_0$$

und nach Z:

$$\triangle y_1 = \triangle y_0 + 1 \,.\, \triangle^2 y_0 + \binom{1}{2} \triangle^3 y_0$$

$$\triangle y_2 = \triangle y_0 + 2 \,.\, \triangle^2 y_0 + \binom{2}{2} \triangle^3 y_0$$

$$\triangle y_3 = \triangle y_0 + 3 \,.\, \triangle^2 y_0 + \binom{3}{2} \triangle^3 y_0$$

$$\vdots$$

$$\triangle y_{n-1} = \triangle y_0 + (n-1)\, \triangle^2 y_0 + \binom{n-1}{2} \triangle^3 y_0.$$

Durch Addition dieser Gleichungen folgt mit Rücksicht auf A und § 33c für das $n+1$te Glied der gegebenen Reihe:

$$\left.\begin{array}{l} y_n = y_0 + n\,.\,\triangle y_0 + \binom{n}{2}\triangle^2 y_0 + \binom{n}{3}\triangle^3 y_0,\ \text{oder} \\ y_n = y_0 + n\,.\,\triangle y_0 + \frac{n(n-1)}{2}\triangle^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}\triangle^3 y_0\,. \end{array}\right\}\ .\,(\text{III}).$$

Aus den Gleichungen I, II, III läfst sich schliefsen, dafs für die Reihe r. Ranges das $(n+1)$te Glied:

$$^*y_n = y_0 + n\,.\triangle y_0 + \binom{n}{2}\triangle^2 y_0 + \binom{n}{3}\triangle^3 y_0 + \binom{n}{4}\triangle^4 y_0 + \ldots + \binom{n}{r}\triangle^r y_0 \ldots \ldots (\text{W})$$

sein wird. Der evidente Beweis kann in folgender Weise durch Induktion erbracht werden.

Ist die gegebene Reihe $y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots\ldots y_n$ vom $(r+1)$ten Range, so ist zunächst (s. A)

$$y_n = y_0 + \triangle y_0 + \triangle y_1 + \triangle y_2 + \triangle y_3 + \ldots + \triangle y_{n-1} \ldots\ldots (\text{W}^*).$$

Da nun die Glieder der $(r+1)$. Differenzreihe einander gleich und zwar $= \triangle^{r+1} y_0$ sind, so bilden die Glieder der 1. Differenzreihe, also die in W* auf y_0 folgenden Glieder eine Reihe $r$ter Ordnung, für welche

das 1. Glied $= \triangle y_0$,
" " " der 1. Differenzreihe $= \triangle^2 y_0$,
" " " " 2. " $= \triangle^3 y_0$,
" " " " letzten (r.) " $= \triangle^{r+1} y_0$ ist, so dafs (s. W):

$$\triangle y_n = \triangle y_0 + \binom{n}{1}\triangle^2 y_0 + \binom{n}{2}\triangle^3 y_0 + \binom{n}{3}\triangle^4 y_0 + \ldots + \binom{n}{r}\triangle^{r+1} y_0 \ldots\ldots (\text{W}^{**})$$

Nun ist $y_0 = y_0$

$\triangle y_0 = \triangle y_0$

und nach W**:

$$\begin{aligned} \triangle y_1 &= \triangle y_0 + \binom{1}{1}\triangle^2 y_0 + \binom{1}{2}\triangle^3 y_0 + \ldots + \binom{1}{r}\triangle^{r+1} y_0 \\ \triangle y_2 &= \triangle y_0 + \binom{2}{1}\triangle^2 y_0 + \binom{2}{2}\triangle^3 y_0 + \ldots + \binom{2}{r}\triangle^{r+1} y_0 \\ \triangle y_3 &= \triangle y_0 + \binom{3}{1}\triangle^2 y_0 + \binom{3}{2}\triangle^3 y_0 + \ldots + \binom{3}{r}\triangle^{r+1} y_0 \\ &\vdots \\ \triangle y_{n-1} &= \triangle y_0 + \binom{n-1}{1}\triangle^2 y_0 + \binom{n-1}{2}\triangle^3 y_0 + \ldots + \binom{n-1}{r}\triangle^{r+1} y_0. \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen folgt mit Rücksicht auf W* und § 33c:

$$y_n = y_0 + n\triangle y_0 + \binom{n}{2}\triangle^2 y_0 + \binom{n}{3}\triangle^3 y_0 + \ldots + \binom{n}{r+1}\triangle^{r+1} y_0.$$

Da nun das $(n+1)$. Glied der Reihe $(r+1)$ten Ranges wirklich dieselbe Form wie in W das $(n+1)$. Glied der Reihe

r. Ranges hat, so mufs die dort angenommene Form die gesuchte sein.

Ist die gegebene Reihe:

$$\underbrace{y_0}_{1}, \quad \underbrace{y_1}_{2}, \quad \underbrace{y_2}_{3}, \ldots\ldots \underbrace{y_n}_{n+1}$$

und setzt man der Kürze wegen

das 1. Glied der 1. Differenzreihe $= d_1$,
„ 1. „ „ 2. „ $= d_2$,
„ 1. „ „ 3. „ $= d_3$ u. s. w., so ist

das $(n+1)$. Glied der Reihe r. Ranges nach W:

$$\left.\begin{aligned} y_n &= y_0 + nd_1 + \tbinom{n}{2} d_2 + \tbinom{n}{3} d_3 + \tbinom{n}{4} d_4 + \ldots\ldots + \tbinom{n}{r} d_r \\ \text{oder } y_n &= y_0 + nd_1 + \frac{n(n-1)}{2} d_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3} d_3 + \ldots\ldots \end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{N}).$$

Diese Formeln benutzt man, um ein beliebiges Glied einer gegebenen arithmetischen Reihe zu finden. Ist z. B.

$$\underbrace{31}_{1}, \quad \underbrace{51}_{2}, \quad \underbrace{68}_{3}, \quad \underbrace{77}_{4}, \quad \underbrace{73}_{5}, \quad \underbrace{51}_{6}, \ldots.$$

gegeben, für welche Reihe die Differenzen

20 17 9 —4 —22...
—3 —8 —13 —18....
—5 —5 —5... sind,

und soll das 7. Glied ($=y_6$) gefunden werden, so ist $y_0=31$, $d_1=20$, $d_2=-3$, $d_3=-5$, $d_4=0$, folglich ist (s. N)

$$\begin{aligned} y_6 &= 31 + 6\,.\,20 + \tbinom{6}{2}(-3) + \tbinom{6}{3}(-5) \\ &= 31 + 6\,.\,20 + \frac{6\,.\,5}{2}(-3) + \frac{6\,.\,5\,.\,4}{2\,.\,3}(-5) \\ &= 31 + 120 - 45 - 100 = 6. \end{aligned}$$

Entwickelt man N nach Potenzen von n, so erhält man das allgemeine Glied der Reihe. Bis n^5 und d_5 entwickelt ergiebt sich aus N:

$$y_n = y_0 + nd_1 + \frac{n^2-n}{2} d_2 + \frac{n^3-3n^2+2n}{6} d_3 + \ldots$$

$$y_n = y_0 + nd_1 + \frac{n^2}{2} d_2 - \frac{n}{2} d_2 + \frac{n^3}{6} d_3 - \frac{n^2}{2} d_3 + \ldots. \text{ oder}$$

$$y_n = y_0 + \left(d_1 - \frac{d_2}{2} + \frac{d_3}{3} - \frac{d_4}{4} + \frac{d_5}{5}\right) n + \left(\frac{d_2}{2} - \frac{d_3}{2} + \frac{11 d_4}{24} - \frac{5 d_5}{12}\right) n^2 + \left(\frac{d_3}{6} - \frac{d_4}{4} + \frac{7 d_5}{24}\right) n^3 + \left(\frac{d_4}{24} - \frac{d_5}{12}\right) n^4 + \frac{d_5}{120} n^5 + \ldots \ldots (\mathrm{P}).$$

Für die Reihe: 31, 51, 68.... (s. das letzte Beispiel) ist hiernach das allgemeine Glied

$$y_n = 31 + \left(20 - \frac{-3}{2} + \frac{-5}{3}\right) n + \left(\frac{-3}{2} - \frac{-5}{2}\right) n^2 + \frac{-5}{6} . n^3,$$

$$y_n = 31 + 19\tfrac{5}{6} n + n^2 - \tfrac{5}{6} n^3 \ldots\ldots (\mathrm{P}^*).$$

Z. B. $y_6 = 31 + 19\frac{5}{6} . 6 + 36 - \frac{5}{6} . 216 = 6.$

Setzt man in P* der Reihe nach $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots,$ so erhält man die gegebene Reihe: 31, 51, 68, 77,....

Eine unmittelbare Anwendung der Formeln für die arithmetischen Reihen ist die Interpolation (s. § 158).

49.

Ist das 1. Glied der gegebenen Reihe nicht y_0, sondern y_1, die gegebene Reihen also

$$\underset{y_1,}{\overset{1}{\smile}} \quad \underset{y_2,}{\overset{2}{\smile}} \quad \underset{y_3,}{\overset{3}{\smile}} \ldots\ldots \underset{y_n}{\overset{n}{\smile}}$$

so ist y_n nicht (wie im vorhergehenden Paragraph) das $n+1$te, sondern $n$te Glied und daher ist in N auf der rechten Seite $n-1$ statt n und y_1 statt y_0 zu setzen. Man erhält:

$$y_n = y_1 + (n-1) d_1 + \binom{n-1}{2} d_2 + \binom{n-1}{3} d_3 + \ldots \text{ oder}$$
$$y_n = y_1 + (n-1) d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} d_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} d_3 + \ldots \ldots (\mathrm{Q}).$$

Beispiel. Es sei die Reihe 3. Ranges:

	1		2		3		4		5		6
	1		64		343		1000		2197		4096
mit den		63		279		657		1197		1899	
Diffe-			216		378		540		702		
renzen				162		162		162			

gegeben und das (—2)te Glied zu finden.

Mit $y_1=1$, $d_1=63$, $d_2=216$, $d_3=162$ findet man

$$y_{-2}=1+(-3).63+\frac{(-3)\,(-4)}{2}.216+\frac{(-3)\,(-4)\,(-5)}{2\,.\,3}.162$$
$$=1-189+1296-1620=-512.$$

Probe:
$$\underbrace{(-8)^3}_{-2},\ \underbrace{(-5)^3}_{-1},\ \underbrace{(-2)^3}_{0},\ \underbrace{1^3}_{1},\ \underbrace{4^3}_{2},\ \underbrace{7^3}_{3},\ \underbrace{10^3}_{4}\ldots$$
$$-512,\ -125,\ -8,\ 1,\ 64,\ 343,\ 1000.$$

Entwickelt man Q nach Potenzen von n, so erhält man als allgemeines Glied (n. Glied) der Reihe:

$$y_n=y_1+nd_1-d_1+\frac{n^2}{2}d_2-\frac{3n}{2}d_2+d_2+\ldots\text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_n=y_1-d_1+d_2-d_3+d_4-d_5+\left(d_1-\frac{3}{2}d_2+\frac{11}{6}d_3-\frac{25}{12}d_4+\frac{137}{60}d_5\right)n \\ +\left(\frac{1}{2}d_2-d_3+\frac{35}{24}d_4-\frac{15}{8}d_5\right)n^2+\left(\frac{1}{6}d_3-\frac{5}{12}d_4+\frac{17}{24}d_5\right)n^3 \\ +\left(\frac{1}{24}d_4-\frac{1}{8}d_5\right)n^4+\frac{d_5}{120}n^5+\ldots \end{array}\right\}(Q^*).$$

50.

Um anzudeuten, dafs die Reihe, welche aus einer Funktion von x entspringt, indem man darin $x=1, 2, 3,\ldots$ setzt, summiert werden soll, setzt man vor die Funktion das Zeichen Σ (weniger passend $\int$). So bedeutet z. B. $\Sigma\,(x^3)$ die Summe von $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(x-1)^3+x^3$. Die Summe $y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n$ kürzt man in gleicher Weise mit $\Sigma\,(y_n)$ ab.

Aufgabe. Es soll das summatorische Glied (die Summenformel) einer Reihe, d. i. eine allgemeine Formel gefunden werden, nach welcher man die Summe beliebig vieler Glieder der Reihe bestimmen kann.

Auflösung. Ist die Reihe $r$ten Ranges:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ldots y_n$$

gegeben, bei welcher das 1. Glied der 1. Differenzreihe $=d_1$,
„ 1. „ „ 2. „ $=d_2$,
„ 1. „ „ 3. „ $=d_3$,
„ 1. „ „ letzten „ $=d_r$

ist, so soll also die Summe der ersten n Glieder, d. i. $y_1+y_2+y_3\ldots+y_n$ oder $\Sigma\,(y_n)$ gefunden werden.

Nun ist $y_1 = y_1$

u. nach Q (s. § 49): $y_2 = y_1 + \binom{1}{1} d_1 + \binom{1}{2} d_2 + \binom{1}{3} d_3 + \ldots + \binom{1}{r} d_r$

$$y_3 = y_1 + \binom{2}{1} d_1 + \binom{2}{2} d_2 + \binom{2}{3} d_3 + \ldots + \binom{2}{r} d_r$$

$$\vdots$$

$$y_n = y_1 + \binom{n-1}{1} d + \binom{n-1}{2} d_2 + \binom{n-1}{3} d_3 + \ldots + \binom{n-1}{r} d_r .$$

Die Addition dieser Gleichungen giebt mit Rücksicht auf § 33c als Summe der ersten n Glieder der Reihe:

$$\Sigma(y_n) = ny_1 + \binom{n}{2} d_1 + \binom{n}{3} d_2 + \binom{n}{4} d_3 + \ldots + \binom{n}{r+1} d_r \ldots\ldots (R).$$

Vorstehende Formel ist offenbar das n. Glied einer Reihe, die dadurch entsteht, dafs man in der gegebenen Reihe nach und nach die Summe von 1, 2, 3, ... n Gliedern bildet. Die gegebene Reihe r. Ranges ist daher die 1. Differenzreihe dieser Gliedersummenreihe und folglich ist das summatorische Glied vom $(r+1)$. Range. Dies ergiebt sich auch aus dem vollständig entwickelten Faktor $\binom{n}{r+1}$, der n^{r+1} enthalten mufs.

Beispiel. Es soll die Summe der ersten 6 Glieder $(n=6)$ einer Reihe 3. Ranges gefunden werden, für welche

das 1. Glied $y_1 = 31$
„ 1. „ der 1. Differenzreihe $d_1 = 20$
„ 1. „ „ 2. „ $d_2 = -3$
„ 1. „ „ 3. „ $d_3 = -5$.

(Vergl. in § 48 das Beispiel zur Formel N.)

Mit diesen Zahlen ergiebt sich aus R:

$$\Sigma(y_6) = 6.31 + \binom{6}{2}.20 + \binom{6}{3}(-3) + \binom{6}{4}(-5)$$

$$= 186 + \frac{6.5}{2}.20 + \frac{6.5.4}{2.3}(-3) + \frac{6.5.4.3}{2.3.4}(-5)$$

$$= 186 + 300 - 60 - 75 = 351.$$

Entwickelt man R nach Potenzen von n, so erhält man (wie aus einer Vergleichung mit den Formeln N und P in § 48 unmittelbar erhellt) als Summe der ersten n Glieder:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(y_n) &= \left(y_1 - \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{3} - \frac{d_3}{4} + \frac{d_4}{5} - \frac{d_5}{6}\right)n \\ &+ \left(\frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2} + \frac{11d_3}{24} - \frac{5d_4}{12} + \frac{137\,d_5}{360}\right)n^2 \\ &+ \left(\frac{d_2}{6} - \frac{d_3}{4} + \frac{7d_4}{24} - \frac{5d_5}{16}\right)n^3 + \left(\frac{d_3}{24} - \frac{d_4}{12} + \frac{17d_5}{144}\right)n^4 \\ &+ \left(\frac{d_4}{120} - \frac{d_5}{48}\right)n^5 + \frac{d_5}{720}.n^6 + \ldots\end{aligned}\right\}\ (S)$$

Beispiel. Es sei von der Reihe

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + n^3$$

die Summe der ersten n Glieder zu finden.

Da die Reihe folgende Zahlenwerte zeigt:

	1,		8,		27,		64,		125,		216, ...
Differenz-		7		19		37		61		91	
reihen			12		18		24		30		
				6		6		6 ...			

so ist $y_1 = 1$, $d_1 = 7$, $d_2 = 12$, $d_3 = 6$, $d_4 = 0$ und folglich ist

$$\Sigma(n^3) = \left(1 - \frac{7}{2} + \frac{12}{3} - \frac{6}{4}\right)n + \left(\frac{7}{2} - \frac{12}{2} + \frac{11.6}{24}\right)n^2$$

$$+ \left(\frac{12}{6} - \frac{6}{4}\right)n^3 + \frac{6}{24}n^4$$

$$= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ oder}$$

$$\Sigma(n^3) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Hiernach ist z. B.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 20^3 = \left(\frac{20.21}{2}\right)^2 = 210^2 = 44100.$$

In gleicher Weise findet man:

$$\Sigma(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Sigma(n^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}$$

$$\Sigma(n^4) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)\ (3n^2+3n-1)}{30}$$

$$= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

$$\Sigma(n^5)=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}$$

$$\Sigma(n^6)=\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42}$$

$$\Sigma(n^7)=\frac{n^8}{8}+\frac{n^7}{2}+\frac{7n^6}{12}-\frac{7n^4}{24}+\frac{n^2}{12}$$

$$\Sigma(n^8)=\frac{n^9}{9}+\frac{n^8}{2}+\frac{2n^7}{3}-\frac{7n^5}{15}+\frac{2n^3}{9}-\frac{n}{30}.$$

Die Formeln für die Summen der 1. bis 4. Potenzen finden in der Mechanik öfter Anwendung.

Soll $\Sigma\,(2x^3-x+1)$, d. h. die Summe einer Reihe, deren allgemeines Glied $2x^3-x+1$ ist, gesucht werden, so sind zunächst aus diesem Ausdruck mit $x=1$, $x=2$, $x=3$ u. s. w. die Glieder der Reihe zu bilden. Man findet die in § 42 enthaltenen Zahlen und mithin ist in S: $n=x$, $y_1=2$, $d_1=13$, $d_2=24$, $d_3=12$, $d_4=0$ zu setzen und es ergiebt sich

$$\Sigma\,(2x^3-x+1)=\left(2-\frac{13}{2}+\frac{24}{3}-\frac{12}{4}\right)x+\left(\frac{13}{2}-\frac{24}{2}+\frac{11.12}{24}\right)x^2$$

$$+\left(\frac{24}{6}-\frac{12}{4}\right)x^3+\frac{12}{24}x^4$$

$$=\frac{x}{2}(x^3+2x^2+1).$$

Viertes Buch.

Von den figurierten Zahlen.

52.

Bildet man aus der Reihe der aufeinander folgenden natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... n die Summenreihe, nämlich:

$$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad 15 \ldots \frac{n.(n+1)}{1.2}$$

```
o      o       o        o
      o o     o o      o o  .........
             o o o    o o o
                     o o o o
```

so entstehen die sogenannten dreieckigen Zahlen, weil, wenn man sich Kugeln von gleichem Durchmesser denkt, die Anzahl, welche jedes Glied der Reihe darstellt, sich in einer Ebene so aneinander legen lassen, dafs immer ein gleichseitiges Dreieck entsteht. Die Richtigkeit folgt unmittelbar aus der Reihe 1, 2, 3... An n Kugeln kann man n—1 legen, an diese wieder n—2 &c.

Aus demselben Grunde nennt man die Quadratzahlen auch wohl viereckige Zahlen *).

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16 \ldots\ldots n^2$$

```
o     o o     o o o
      o o     o o o ..........
              o o o
```

Beiderlei vieleckige Zahlen sind offenbar arithmetische Reihen zweiten Ranges.

*) Es giebt übrigens noch viele andere Zahlenreihen, welche, jedoch unpassend, figurierte Zahlen (Polygonalzahlen) heifsen, aber keinen praktischen Nutzen haben.

53.

Bildet man aus den Reihen der dreieckigen und viereckigen Zahlen die Summenreihen, welche also vom dritten Range sein müssen und deren allgemeine Glieder, nach § 50, leicht zu finden sind, so erhält man die sogenannten dreieckigen und viereckigen Pyramidalzahlen, nämlich:

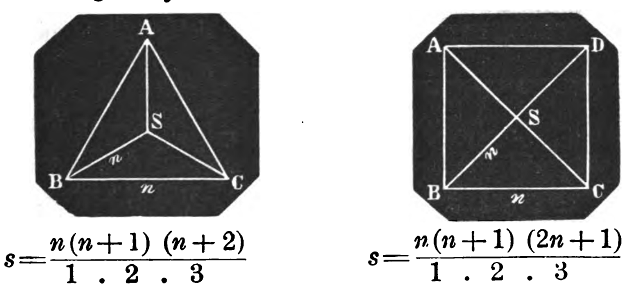
$$1, \quad 4, \quad 10, \quad 20, \quad 35 \ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$1, \quad 5, \quad 14, \quad 30, \quad 55 \ldots \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Der Name rührt daher, weil sich aus Kugeln von gleichem Kaliber wirklich regelmäfsige Pyramiden bilden lassen. In der Reihe der dreieckigen Zahlen z. B. findet die erste Kugel Platz und kommt fest zu liegen auf den folgenden drei. Die hierdurch erhaltene dreieckige Pyramide von vier Kugeln kann man auf die folgende Schicht von sechs Kugeln gesetzt denken &c. Ebenso lassen sich offenbar die Kugeln, welche die viereckigen Zahlen darstellen, zu einer viereckigen Pyramide aufschichten, wie es auch in den Zeughäusern wirklich geschieht.

54.

Es ist also leicht, die Anzahl Kugeln in einer dreieckigen und viereckigen Pyramide zu berechnen.



$$s = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \qquad s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

So viele Kugeln nämlich in der untersten Reihe BC liegen, ebenso viele liegen auch in der schräg aufsteigenden Reihe BS und ebenso viele Schichten liegen folglich aufeinander. Liegen also in der untersten Reihe n Kugeln, so hat man nur die Summe

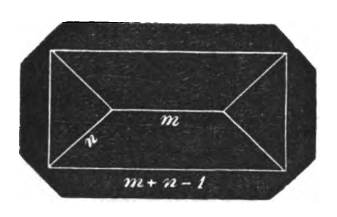
von n Gliedern der dreieckigen und viereckigen Zahlen zu nehmen. Diese ist, wie schon angegeben, für die dreieckige Pyramide $=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$, und für die viereckige $=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}$.

Sind die Pyramiden nicht voll, jedoch parallel zur untersten Schicht abgekürzt, und liegen in der untersten Reihe n, in der obersten Reihe m Kugeln, so ist die Zahl der Kugeln in der abgekürzten dreis. Pyramide $=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}-\frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ und in der abgekürzten viers. Pyramide $=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}-\frac{m.(m+1)(2m+1)}{1\,.\,2\,.\,3}$.

Lägen z. B. in der untersten Reihe der vollen dreieckigen Pyramide 20 Kugeln, so ist die Zahl aller $=\frac{20\,.\,21\,.\,22}{1\,.\,2\,.\,3}=1540$.

55.

Aufser in dreieckigen und viereckigen Pyramiden werden die Kugeln auch in länglichen Haufen aufgerichtet, und es ist auch hier leicht, die Anzahl derselben zu berechnen. Liegen nämlich in der obersten Reihe (Rücken) m Kugeln, so liegt diese offenbar auf einer Schicht von zwei Reihen von je $m+1$ Kugeln; diese Schicht enthält also $2(m+1)$ Kugeln und liegt wieder auf einer Schicht von drei Reihen von je $m+2$ Kugeln. Diese dritte Schicht enthält also $3(m+2)$ Kugeln &c. Liegen also in einer Seite eines Seitendreiecks (welches offenbar gleichseitig ist) n Kugeln, so besteht der ganze Haufen aus n Schichten und die unterste Schicht enthält n Reihen von je $m+n-1$ Kugeln.



$$s=\frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Die aufeinander folgenden Schichten des ganzen Haufens sind also:

$$\underset{1}{m},\quad \underset{2}{2m+2},\quad \underset{3}{3m+6},\quad \underset{4}{4m+12},\quad \underset{5}{5m+20},\ldots \underset{n}{n(m+n-1)}.$$

Diese Reihe ist offenbar eine arithmetische vom 2ten Range, das summatorische Glied also vom 3ten Range. Mithin:

$s = an^3 + bn^2 + cn + d$. Weil aber $1.2.3.a = 2$ und zufolge des § 50 erwähnten Grundes für $n = 0$ auch $s = 0$ sein mufs, so ist $a = \frac{1}{3}$ und $d = 0$, folglich näher bestimmt:

$$s = \frac{n^3}{3} + bn^2 + cn.$$

Die noch zu bestimmenden Koeffizienten b, c müssen nun so beschaffen sein, dafs für $n = 1$, $s = m$ und für $n = 2$, $s = 3m + 2$ wird. Dies giebt uns die beiden Bedingungsgleichungen:

$$m = \tfrac{1}{3} + b + c$$
$$3m + 2 = \tfrac{8}{3} + 4b + 2c$$

woraus: $b = \frac{1}{2}m$ und $c = \frac{1}{2}m - \frac{1}{3}$.

Es ist mithin:

$$s = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}mn^2 + \tfrac{1}{2}mn - \tfrac{1}{3}n$$

$$\text{oder: } s = \frac{n}{6}[2(n+1)\ (n-1) + 3m\,(n+1)]$$

$$s = \frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$$

Anmerkung. Vega giebt für diese Formel folgende leichte Gedächtnisregel: Man addiere zu dem Rücken des Haufens beide mit ihm gleichlaufenden Grundlinien und multipliziere den dritten Teil der Summe mit der Anzahl Kugeln eines Seitendreiecks, welche Anzahl immer $= \frac{n(n+1)}{1\ .\ 2}$ ist. Diese Gedächtnisregel pafst (wie schon Vega bemerkt) auch für die dreieckige und viereckige Pyramide, wo dann aber bei der viereckigen Pyramide der Rücken nur eine, und bei der dreieckigen sowohl der Rücken, als auch die eine Grundlinie, jede nur eine Kugel hat.

Fünftes Buch.

Konvergenz unendlicher Reihen.

56.

Einen Gröfsenausdruck, welcher nach ganzen und positiven Potenzen einer veränderlichen Gröfse x fortschreitet, wie $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ nennt man die Grundform der Analysis, und es ist eine der wichtigsten Aufgaben dieser Wissenschaft, alle Funktionen einer veränderlichen Gröfse, welche diese Form nicht haben, wie z. B. a^x, $\sin x$, $\cos x$ &c., in dieselbe umzuschmelzen, weil man aus dieser einfachern Grundform das Wesen und die Eigenschaften der Funktionen oftmals deutlicher erkennen, sowie auch den Wert der Funktion für ein bestimmtes x danach leichter berechnen kann.

Man kann die Grundform der Analysis, in welcher die beständigen Koeffizienten a, b, $c \ldots$ beliebige ganze, gebrochene, positive oder negative endliche Zahlen, Null nicht ausgenommen, sein können, gleichnisweise ein allgemeines Zahlensystem nennen, indem in der That jedes besondere darin enthalten ist, z. B. das dekadische, für welches $x = 10$ ist, und die Koeffizienten a, b, $c \ldots$ einen der Werte 0, 1, 2, 3 bis 9 haben. So ist z. B.:

$$57\,034 = 4 + 3 . 10 + 0 . 10^2 + 7 . 10^3 + 5 . 10^4.$$

Ferner nennt man die Grundform der Analysis eine Form 1sten, 2ten....$n$ten Grades, je nachdem der höchste Exponent der veränderlichen Gröfse 1, 2, 3....n ist. $a + bx$ oder bx ist eine Form 1sten Grades, $a + bx + cx^2$; $a + bx^2$ sind Formen zweiten Grades &c.

57.

Daſs sich eine Funktion, welche die Grundform der Analysis nicht hat, auf dieselbe bringen läſst, davon bietet schon die Newtonsche Formel ein vorläufiges Beispiel. So ist z. E.:

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Auf den glücklichen Gedanken aber, alle Funktionen auf die Grundform der Analysis zu bringen, mögen wohl zuerst die gebrochenen Funktionen geführt haben*), die man stets als angedeutete Divisionen betrachten und durch wirkliche Division in solche Reihen verwandeln kann, welche diese Grundform haben.

Nehmen wir als Erläuterungs-Beispiel die einfache gebrochene Funktion $\frac{1}{1-x}$ und dividieren, wie es in der Algebra § 321 gelehrt worden, den Zähler (1) durch den Nenner $(1-x)$. so ist der Quotient 1, und nachdem man hiermit den Divisor multipliziert und das Produkt vom Dividend (1) subtrahiert, bleibt x als Rest. Dividiert man abermals diesen Rest &c., so kommt nach und nach:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

Es ist klar, daſs die Ausdrücke rechter Hand, wenn man sie einrichtet, alle auf die ursprüngliche Form $\frac{1}{1-x}$ zurückführen, und daſs folglich die Zulässigkeit dieser Art Division dadurch gerechtfertigt ist, und daſs man auf beiden Seiten gleiche Werte erhalten muſs, was für eine bestimmte Zahl man auch statt der veränderlichen Gröſse x annehmen mag.

*) Nikol. Kauffmann, auch Mercator genannt, ein Holsteiner, soll zuerst auf die Idee der unendlichen Reihen gekommen sein, in welche er die gebrochenen Funktionen verwandelte, um sie leichter integrieren zu können.

58.

Bei solchen Umformungen der Funktionen kommt man aber in der Regel auf solche gesetzmäſsig fortschreitende Reihen, die kein Ende nehmen und deshalb unendliche (transscendente) Reihen genannt werden. (Vergl. die Anmerkung in § 34.) Es fragt sich deshalb, ob in materieller Hinsicht, d. h. wenn man für die veränderliche Gröſse einen bestimmten Wert setzt, der Betrag (Summe) der unendlichen Reihe oder vielleicht auch schon ein Stück davon dem wirklichen Betrage der Funktion, wenn auch nicht vollkommen, so doch näherungsweise und für die Praxis genügend gleich ist, oder nicht*). Dies hängt von einem wohl zu beachtenden Umstande ab, nämlich: ob die unendliche Reihe konvergent oder divergent ist.

59.

Eine gesetzmäſsige unendliche Reihe, d. h. eine solche, deren Glieder nach einem bestimmten Gesetz (allgemeines Glied) entspringen, heiſst konvergent, wenn, wieviel Glieder vom Anfang an man auch summieren wollte, die Summe derselben eine gewisse bestimmte Grenze s (endliche Zahl!) nie überschreiten, sich ihr jedoch immer mehr und mehr nähern kann. Nehmen wir z. B. die gesetzmäſsige Reihe:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n} \ldots\ldots \text{ in infinitum,}$$

deren allgemeines Glied $\frac{1}{2^n}$, so wissen wir schon aus der Algebra § 329, daſs die Summe immer gröſser wird, je mehr Glieder man zusammenfaſst, daſs trotzdem aber die Summe die Zahl 1 nie überschreiten kann. Die fragliche unendliche Reihe ist mithin konvergent und ihre Summe $= 1$.

Divergent ist hingegen eine unendliche Reihe, wenn ihre Summe entweder $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

---

*) Unendliche Reihen kommen schon in der Arithmetik vor, z. B.: $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, jedoch kennt man hier das Gesetz nicht, nach welchem die Ziffern der Wurzel aufeinander folgen.

60.

Damit eine unendliche Reihe konvergent sei, ist offenbar notwendig, dafs ihre Glieder, bis zum Verschwinden, immer kleiner und kleiner werden. Aber dies Merkmal allein genügt noch nicht. Denn betrachten wir einmal die Reihe:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}|+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}|+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{12}|+\ldots+\tfrac{1}{24}|+\ldots+\frac{1}{\infty}$$

deren Glieder bis zum Verschwinden abnehmen. Denken wir uns diese Reihe, wie angedeutet (von den beiden ersten Gliedern an, in Gruppen von 3, 6, 12, 24, 48 &c. Glieder geteilt, so ist klar, dafs, wenn jedes Glied in einer Gruppe auch nur den Wert des letzten darin hätte, dennoch die Summe einer jeden Gruppe $= \frac{1}{2}$ sein würde. Da nun die Zahl der Gruppen unendlich ist, so ist auch die Summe der ganzen Reihe (weil $\infty \cdot \frac{1}{2} = \infty$) unendlich grofs, und also die Reihe nicht konvergent, sondern divergent (s. § 59).

61.

Ein leichtes Kennzeichen, woran man in den meisten Fällen die Konvergenz einer gesetzmäfsigen unendlichen Reihe erkennen kann, giebt uns die einfache geometrische Progression:

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots + ax^{n-1}$$

Denn bezeichnen wir die Summe von n Gliedern mit s, so ist bekanntlich (Algebra § 256):

$$s = \frac{ax^n - a}{x - 1}$$

$$\text{oder } s = \frac{a - ax^n}{1 - x}$$

Ist nun der Exponent $x = 1$, so ist für $n = \infty$ die Summe der unendlichen Progression $a + ax + ax^2 + \ldots + \ldots ax^{n-1} = \infty \cdot a$, also unendlich (Algebra § 328), mithin die unendliche Reihe

$$a + ax + ax^2 + \ldots + \ldots + ax^{n-1} + \ldots$$

für $x = 1$ divergent, und dies ist sie offenbar um so mehr, wenn $x > 1$. Ist aber der Exponent ein echter Bruch, also $x < 1$, so wird für $n = \infty$ in obiger Gleichung, die man auch so schreiben kann:

$$s = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}$$

der Faktor $x^\infty = 0$ *) und die Summe der unendlichen Progression $= \frac{a}{1-x}$. Eine unendliche geometrische Progression, deren Exponent ein echter Bruch ist, ist folglich immer konvergent. Um also zu erkennen, ob eine gesetzmäfsig fortschreitende unendliche Reihe konvergent ist, dividiere man nur mit einem Gliede in das nächstfolgende; ist dann der Quotient ein echter Bruch und bleibt für die ganze Reihe immer derselbe, so ist diese Reihe offenbar eine geometrische Progression und, wie eben bewiesen, konvergent, und dies um so mehr, wenn der fragliche Quotient immer kleiner wird. Wird aber der Quotient immer gröfser und zuletzt >1, so ist die Reihe divergent **).

Zusatz. Wenn also in einer unendlichen Reihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 +$ &c., welche nach ganzen positiven Potenzen der veränderlichen Gröfse x fortschreitet, — und mit solchen Reihen haben wir es in der Folge nur zu thun — die Koeffizienten a_0, a_1, $a_2 \ldots$ endliche Zahlen sind, so ist die Reihe für jeden Wert von $x<1$ immer konvergent. Denn bezeichnen wir den gröfsten Koeffizienten mit a und legen allen Koeffizienten diesen Wert bei, so ist, wie eben gezeigt, die unendliche geometrische Progression $a + ax + ax^2 +$ &c., für $x<1$ konvergent, um so mehr also die fragliche Reihe.

---

*) Sei z.B. $x = \frac{4}{5} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}}$, so ist $(\frac{4}{5})^\infty = \frac{1}{(1+\frac{1}{4})^\infty} = \frac{1}{1+\infty\,.\,\frac{1}{4}+\ldots} = \frac{1}{\infty} = 0$.

**) Die Untersuchungen über Konvergenz oder Divergenz solcher unendlichen Reihen, bei welchen der erwähnte Quotient immer gröfser und zuletzt $=1$ wird, führen auf sehr grofse Weitläufigkeiten. Da aber alle solche Reihen nur rein wissenschaftliches und kein praktisches Interesse haben, indem sie in den Fällen, wo sie konvergent sind, doch immer so schlecht konvergieren, dafs man mehrere Tausend, ja mehrere Millionen Glieder addieren müfste, um die Summe nur bis auf zehn Decimalen genau zu erhalten, so können wir alle diese Reihen ganz unbeachtet lassen. Von praktisch brauchbaren unendlichen Reihen verlangt man immer eine so starke Konvergenz, dafs in der Regel schon die Zusammenfassung der zwei, drei oder vier ersten Glieder genügt. (§ 170.)

62.

In § 57 erhielten wir durch Partialdivision

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}.$$

Setzen wir für die veränderliche Gröfse x einen beliebigen echten Bruch, so ist für $n=\infty$, das sogenannte Restglied $\frac{x^n}{1-x}=0$. Die dadurch hervorgerufene unendliche Reihe hat also für $x<1$ (weil dann konvergent) wirklich Sinn, d. h. wir können das Restglied weglassen, die unendliche Reihe statt ihrer Quelle $\frac{1}{1-x}$ und umgekehrt setzen, weil für $x<1$ die Funktion $\frac{1}{1-x}$ wirklich die Summe der unendlichen Reihe ist. Setzt man z. B. $x=\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ &c., so hat man:

$$2=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\ldots \text{ in infinitum}$$
$$3=1+\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{9}+\tfrac{8}{27}+\ldots \text{ in infinitum.}$$

63.

Jede unendliche Reihe mit regelmäfsig abwechselnden Vorzeichen, und deren Glieder bis zum Verschwinden abnehmen, ist immer konvergent, so z. B. die Reihe:

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-+\ldots\pm\frac{1}{2n-1}.$$

Denn hier ist zuvor klar, dafs ihre Summe positiv sein mufs, weil die Reihe sich so schreiben läfst: $(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\ldots\ldots$ d. i. $2\left\{\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\,(4n-1)}\right\}$. Ferner ist klar, dafs die Summe kleiner als das erste Glied ist, weil immer mehr subtrahiert, als wieder zugelegt wird, oder weil die als positiv erkannte Reihe sich auch so schreiben läfst: $1-(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})-(\frac{1}{7}-\frac{1}{9})\ldots$ Diese Reihe ist mithin konvergent.

64 a.

Wenn zwei nach ganzen Potenzen einer veränderlichen Gröfse x fortschreitende endliche, oder auch konvergente

unendliche Reihen: $a+bx+cx^2+dx^3+..$ und $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+..$ für jeden Wert von x gleiche Resultate geben sollen, so müssen notwendig die Koeffizienten von gleich hohen Potenzen der veränderlichen Gröfse einander gleich sein. In Zeichen: wenn für jeden Wert von x

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots.(1)$$

sein soll, so mufs notwendig sein:

$$a=\alpha;\ b=\beta;\ c=\gamma;\ d=\delta\ \&c.$$

Dieser Satz läfst sich folgendermafsen beweisen.

Da nämlich die Gleichung (1) für jeden Wert von x bestehen soll, so setze man $x=0$, alsdann werden alle mit x multiplizierten Glieder $=0$ und es bleibt: $a=\alpha$.

Gleichung (1) geht damit über in

$$a+bx+cx^2+\ldots=\alpha+\beta x+\gamma x^2\ldots,\ \text{d. i.}$$
$$bx+cx^2+dx^3+\ldots=\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots$$

oder, indem man durch x dividiert, wo aber, um den vieldeutigen Ausdruck $\frac{0}{0}$ zu vermeiden, x nicht $=0$ sein darf:

$$b+cx+dx^2+\ldots=\beta+\gamma x+\delta x^2+\ldots$$

Setzt man in dieser Gleichung wieder $x=0$, so folgt: $b=\beta$. Auf dieselbe Weise ergiebt sich $c=\gamma$, $d=\delta$ &c.

Anmerkung. Aus der Gleichung (1) folgt noch:

$$(a-\alpha)+(b-\beta)x+(c-\gamma)x^2+\ldots=0.$$

Wenn also eine nach ganzen positiven Potenzen einer veränderlichen Gröfse x fortschreitende Reihe für jeden Wert von $x=0$ sein soll, in Zeichen:

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots=0\ldots\ldots\ldots.(2)$$

so mufs notwendig jeder Koeffizient A, B, C.... $=0$ sein. Dieser Satz ist im Grunde derselbe wie der vorhergehende, und kann auch ebenso bewiesen werden. Denn setzt man in (2) $x=0$, so folgt $A=0$ und es bleibt:

$$Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots=0$$

oder durch x dividiert:

$$B+Cx+Dx^2+\ldots=0.$$

Setzt man jetzt wieder $x=0$, so ist auch $B=0$ &c. $C=0$, $D=0\ldots$

Zusatz. Es folgt hieraus, dafs eine stetige Funktion einer veränderlichen Gröfse, x, jedenfalls nur auf eine Art in eine

nach ganzen Potenzen von x fortschreitende konvergente Reihe entwickelt werden kann. Denn angenommen, man habe $\varphi(x)$ nach zwei durchaus verschiedenen Methoden entwickelt, und es seien:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots.$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \dots.$$

die beiden Reihen und deren beiderseitige Summen, solange sie konvergieren, einander gleich, so mufs nach dem Vorhergehenden notwendig $a = \alpha$, $b = \beta$ &c. sein.

64 b.

Die Reihe $y_1 + y_2 + y_3 + \dots. + y_\infty$ mufs konvergent sein, wenn jedes Glied kleiner ist als das Glied mit gleichem Index einer schon als konvergent bekannten unendlichen Reihe $t_1 + t_2 + t_3 + \dots t_\infty$. Denn ist

$$\begin{array}{c} y_1 < t_1 \\ y_2 < t_2 \\ y_3 < t_3 \\ \vdots \\ \hline \end{array}$$

so ist $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_\infty < t_1 + t_2 + t_3 + \dots. t_\infty$, d. i.
$<$ irgend eine endliche Zahl.

Nach dieser Vorbereitung können wir nun zu der Verwandlung der Funktionen in Reihen schreiten. Man merke sich aber, dafs, wenn die Reihen, wie fast immer der Fall ist, unendlich (transscendent — s. § 34) werden, dieselben dann, wenn sie Sinn haben und ihrer Quelle gleich geachtet werden sollen, notwendig konvergent sein müssen.

Sechstes Buch.

Verwandlung der Funktionen in Reihen.

Rekurrierende Reihen.

65.

Hat man eine gebrochene Funktion, deren Zähler und Nenner nach ganzen steigenden Potenzen derselben veränderlichen Gröfse x geordnet sind, z. B. $\frac{a+bx+cx^2}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3}$ und wo das erste Glied im Nenner konstant ist (kein x enthält), so kann man eine solche Funktion, wie schon § 57 angedeutet, durch Partialdivision in eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln. So giebt z. B. $\frac{2+5x}{1+2x-3x^2}$

$$\begin{array}{l}
2+5x \qquad :1+2x-3x^2 = 2+x+4x^2-5x^3+\ldots \\
\underline{2+4x-6x^2} \\
\qquad x+6x^2 \\
\qquad \underline{x+2x^2-3x^3} \\
\qquad\qquad 4x^2+3x^3 \\
\qquad\qquad \underline{4x^2+8x^3-12x^4} \\
\qquad\qquad\quad -5x^3+12x^4
\end{array}$$

Es ist mithin:

$$\frac{2+5x}{1+2x-3x^2} = 2+x+4x^2-5x^3+\ldots$$

Auf diese Weise, nämlich durch die gewöhnliche Partialdivision, erhält man die Reihe (Quotient) am leichtesten, aber es tritt so das Gesetz derselben nicht hervor, nach welchem man sie beliebig weit fortsetzen kann. Um dieses zur vollständigen Kenntnis der Reihen notwendige Gesetz zu erhalten, wendet man die zuerst von Cartesius angegebene, sogenannte Methode der unbestimmten Koeffizienten an, welche man wegen ihrer grofsen Fruchtbarkeit und schöpferischen Kraft nicht mit Unrecht den Geist der Analysis genannt hat.

66.

Da wir nämlich im voraus überzeugt sind, dafs der Quotient aus $\frac{2+5x}{1+2x-3x^2}$ (wenn man, wie angegeben, mit dem Nenner in den Zähler dividiert) notwendig eine Reihe geben mufs, welche nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitet, so kann man sie vorläufig fingieren. Wir setzen nämlich

$$\frac{2+5x}{1+2x-3x^2} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots.$$

Um die noch unbestimmten (unbekannten) Koeffizienten A_0, A_1, $A_2 \ldots$ zu bestimmen,*) multipliziere man auf beiden Seiten mit dem Nenner der gebrochenen Funktion, so kommt

$$2+5x = (1+2x-3x^2)\,(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots)$$

oder die nur angedeutete Multiplikation wirklich ausgeführt,

$$2+5x = \left\{ \begin{array}{l|l|l|l|l} A_0 + A_1 & x + \ A_2 & x^2 + \ A_3 & x^3 + \ A_4 & x^4 + \ldots \\ \quad + 2A_0 & \ + 2A_1 & \ + 2A_2 & \ + 2A_3 & \ + \ldots \\ & \ - 3A_0 & \ - 3A_1 & \ - 3A_2 & \ + \ldots \end{array} \right.$$

Nehmen wir nun vorläufig an, die ins Unendliche fortlaufende Reihe rechter Hand sei konvergent (um das Restglied weglassen zu können), so haben wir darauf zu bestehen, dafs

*) Weil für jeden Wert von x der vorgegebene Bruch die Summe der ganzen Reihe sein soll, so kann man den ersten Koeffizienten A_0 auch dadurch bestimmen, indem man beiderseits $x = 0$ setzt, alsdann werden alle in x multiplizierten Glieder $= 0$ und es bleibt $\frac{2}{1} = A_0$.

für jeden Wert von x die rechte Seite dasselbe Resultat giebt, wie die linke. Dann müssen aber beiderseits die Koeffizienten von gleich hohen Potenzen von x gleich sein (§ 64). Mithin ist (weil man statt $2+5x$: $2+5x+0\,.\,x^2+0\,.\,x^3+\ldots$ setzen kann):

$$\begin{aligned} &A_0=2\\ &A_1+2A_0=5\\ &A_2+2A_1-3A_0=0\\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

oder so geschrieben:

$$\begin{aligned} &A_0=2\\ &A_1=5-2A_0=5-4=1\\ &A_2=-2A_1+3A_0=-2+6=4\\ &A_3=-2A_2+3A_1=-8+3=-5\\ &A_4=-2A_3+3A_2=10+12=22. \end{aligned}$$

Man sieht hieraus, dafs, nachdem die beiden ersten Koeffizienten A_0, A_1 gefunden sind, man die folgenden alle nach einer und derselben Regel ($A_n=-2A_{n-1}+3A_{n-2}$) erhält, indem man nämlich den nächstvorhergehenden mit -2 und den vorvorhergehenden mit $+3$ multipliziert. Dies ist auch der Grund, weshalb man alle durch Division entstehenden Reihen rekurrierende (zurücklaufende) nennt, obgleich es eigentlich nicht die Reihe, sondern der Rechner ist, welcher rekurriert. Es erhellet wohl leicht, dafs die Rekursionsregel mit der Anzahl der Glieder im Nenner der gebrochenen Funktion wächst.

67.

Die Hauptfragen nun, welche bei einer rekurrierenden Reihe gestellt werden können, sind folgende drei:

1) Aus dem erzeugenden Bruch der rekurrierenden Reihe das allgemeine Glied derselben zu finden, nach welchem man jedes beliebige Glied derselben direkt berechnen kann, d. h. ohne die vorhergehenden erst zu suchen.

2) Die Summe von beliebig vielen Gliedern zu bestimmen.

3) Zu finden, ob eine vorliegende unendliche Reihe eine rekurrierende ist, und wenn sie als solche erkannt, daraus den erzeugenden Bruch zu finden.

Mit den rekurrierenden Reihen haben sich besonders Bernouilli und Moivre viel beschäftigt.

Ob eine rekurrierende Reihe konvergent ist, entscheidet man nach der § 61 gegebenen Regel. Da dies aber sehr selten der Fall ist, so haben die rekurrierenden Reihen fast nur ein rein wissenschaftliches Interesse, weshalb wir auch nicht bei ihnen verweilen dürfen.

Die folgenden fünf Reihen aber sind von der gröfsten Wichtigkeit, teils schon an sich selbst, teils wegen der wichtigen Forderungen und Hilfsmittel, die man daraus zieht, und weil auf sie die ganze Differentialrechnung gegründet werden kann.

Anmerkung 1. Bei der Entwickelung der Funktionen in unendliche Reihen nach der vorhin gezeigten Methode der unbestimmten Koeffizienten wird die unendliche Reihe immer erst fingiert, und der Verlauf der Rechnung mufs dann zeigen, ob eine solche Reihe, welche die Grundform der Analysis hat, möglich ist. Werden dann die vorläufig fingierten Koeffizienten dadurch bestimmt, dafs man, wie in § 66, zwei Grundformen miteinander vergleicht und die Koeffizienten von gleich hohen Potenzen derselben veränderlichen Gröfse gleich setzt, so ist, wenn die unendliche Reihe sich als konvergent ergiebt, alles klar und bündig. Bestimmt man aber die zu findende Reihe aus gewissen Eigenschaften der Funktion, so mufs man sehr vorsichtig und jedenfalls überzeugt sein, dafs die fraglichen Eigenschaften der Funktion e i g e n t ü m l i c h sind.

Anmerkung 2. Es kann eine Funktion einer veränderlichen Gröfse, x, v i e l d e u t i g, d. h. so beschaffen sein, dafs sie für einen bestimmten Wert von x v e r s c h i e d e n e Werte annimmt. So ist z. B. (Algebra § 326, b) für $x=15$ die Funktion $(1+x)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2, =-2, =2.\sqrt{-1}, =-2.\sqrt{-1}$. Ebenso (Trigonometrie § 60 bis 62) für $x=\frac{1}{2}$ die Funktion arc. sin $x=$ arc. sin $\frac{1}{2}=30^0$, $=150^0$, $=390^0$ &c. Wenn also eine solche Funktion sich überhaupt in eine konvergente Reihe von der Form $\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+$&c. verwandeln läfst, so kann von einer solchen Reihe jene Vieldeutigkeit nicht verlangt werden. Denn da die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$, konstant sind, so kann die unendliche Reihe für einen solchen Wert von x,

für welchen sie konvergent ist, doch nur eine Summe (nicht verschiedene) haben, und deshalb auch nur für denjenigen Wert der Funktion gelten, welcher mit dieser Summe übereinstimmt.

Binomischer Lehrsatz für jeden Exponenten.

68.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Funktion $(1+x)^p$ auch für den Fall in eine Reihe zu verwandeln, wo der Exponent keine ganze positive Zahl ist. Wir nehmen das Binom in der einfachen Form $1+x$, da $(a+b)^p = a^p\left(1+\frac{b}{a}\right)^p$.

Es sei nun zuerst p ein positiver echter oder unechter Bruch, den wir mit $\frac{m}{n}$ bezeichnen wollen. Alsdann ist, weil m eine ganze Zahl und $(1+x)^m = 1+mx+\frac{m.m-1}{1\;.\;2}x^2+\ldots.+x^m$ ist (§ 29):

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m} = \sqrt[n]{(1+mx+\frac{m.m-1}{1\;.\;2}x^2+\ldots+x^m)}$$

Nehmen wir nun an, die hier geforderte $n$te Wurzel aus $1+mx+\ldots+x^m$ lasse sich durch eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende konvergente Reihe*) ausdrücken, es sei nämlich:

$$\sqrt[n]{(1+mx+\frac{m.m-1}{1\;.\;2}x^2+\ldots+x^m)} = 1+\mathrm{A}x+\mathrm{B}x^2+\mathrm{C}x^3+\ldots\ldots..$$

so kommt es zunächst nur darauf an, den ersten Koeffizienten A zu bestimmen (weil sich die folgenden daraus ergeben). Dafs das erste Glied rechter Hand notwendig $=1$ sein mufs, folgt daraus, weil für $x=0$ beiderseits dasselbe Resultat kommen mufs, nämlich $\sqrt[n]{1}=1$. (Vergl. § 66, Note, und § 67, Anmerkung 2.)

---

*) Dafs jedenfalls nur eine solche nach ganzen positiven, und nicht nach negativen oder gebrochenen Exponenten fortschreitende Reihe möglich sein kann, folgt schon aus den Regeln der Variation (§ 19, 2), oder der gemeinen Multiplikation, indem die fingierte Reihe $1+\mathrm{A}x+\mathrm{B}x^2\ldots.$, auf die $n$te Potenz erhoben, mit $1+mx+\frac{m.m-1}{1\;.\;2}x^2+\ldots$ übereinstimmen mufs.

Erhebt man beide Seiten auf die $n$te Potenz, so ist:

$$1+mx+\frac{m.m-1}{1\ .\ 2}x^2+\ldots=(1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots)^n$$

Es ist nun leicht einzusehen, dafs die beiden ersten Glieder von der Entwickelung rechter Hand notwendig $1+nAx$ sein müssen;*) denn verwandelt man das in Klammern stehende Polynom in ein Binom, indem man die Summe aller auf 1 folgenden Glieder $=z$ setzt, so ist, weil n eine ganze Zahl:

$$(1+Ax+Bx^2+\ldots.)^n=(1+z)^n=1+nz+\frac{n.n-1}{1\ .\ 2}z^2+\ldots.$$

oder, für z wieder seinen Wert gesetzt, kommt:

$$(1+Ax+Bx^2+..)^n=1+n(Ax+Bx^2+..)+\frac{n.n-1}{1\ .\ 2}(Ax+Bx^2+..)^2\ldots$$

Es ist also:

$$1+mx+\frac{m.m-1}{1\ .\ 2}x^2+\ldots=1+nAx+(nB+\frac{n.n-1}{1\ .\ 2}A^2)x^2+\ldots.$$

Da nun die Koeffizienten von gleich hohen Potenzen von x gleich sein müssen, so hat man zur Bestimmung des fraglichen ersten Koeffizienten A die Gleichung $nA=m$, woraus: $A=\frac{m}{n}$, also A gleich dem Exponenten p. Wäre in $(1+x)^p$ der Exponent p eine negative ganze oder gebrochene Zahl, so ist

$$(1+x)^{-p}=\frac{1}{(1+x)^p}=\frac{1}{1+px+\ldots}=1-px+\ldots$$

Die wirkliche Division zeigt nämlich, dafs auch für diesen Fall der fragliche erste Koeffizient A in der Entwickelung von $(1+x)^{-p}$ gleich dem Exponenten sein mufs. (§ 65.)

69.

Nehmen wir also an, es gäbe für $(1+x)^p$ eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe und setzen:

$$(1+x)^p=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots\ldots(1),$$

so wissen wir jetzt, dafs unter allen Umständen, was auch der Exponent p sein möge, der erste Koeffizient $A=p$ sein mufs.

*) Dies folgt schon aus § 19, Anmerkung, nach welchem man auch die übrigen Glieder auf einem etwas längern Wege direkt bestimmen könnte.

Die übrigen Koeffizienten B, C, D... bestimmt man nun leichter nach folgender häufig Anwendung findenden fruchtbaren Methode.

Weil die Koeffizienten A, B,... nur von p abhängen und dieselben bleiben müssen, wenn man für die veränderliche Gröfse x allerlei Werte setzt, so setzen wir, um auf eine andere Form zu kommen, in (1) $x+u$ statt x,*) so ist

$$(1+\overline{x+u})^p = 1 + A(x+u) + B(x+u)^2 + C(x+u)^3 + \ldots.$$

Entwickeln wir die rechte Seite nach Potenzen von u, jedoch nur so weit, dafs die Koeffizienten von u in der ersten Potenz zusammengefafst werden können, indem wir die Koeffizienten von u^2, $u^3\ldots$, die wir mit M, N... bezeichnen wollen, nicht zu kennen brauchen, so kommt

$$(1+x+u)^p = \begin{cases} 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots \\ \quad\; Au + 2Bxu + 3Cx^2u + \ldots \\ \quad\; Mu^2 + Nu^3 + \ldots \end{cases}$$

oder, weil $(1+x)^p$ statt der obersten Reihe $1+Ax+Bx^2+\ldots.$ gesetzt werden kann, Gleichung (1):

$$(1+x+u)^p = (1+x)^p + (A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3\ldots)u + Mu^2 + Nu^3 + \ldots. \quad (2)$$

Da nun aber auch $1+x+u = (1+x)\left(1+\frac{u}{1+x}\right)$, mithin

$$(1+x+u)^p = (1+x)^p\left(1+\frac{u}{1+x}\right)^p$$

und also auch, indem wir in die angenommene Form, Gleichung (1), $\frac{u}{1+x}$ statt x setzen und entwickeln,

$$(1+x+u)^p = (1+x)^p\left\{1 + A\frac{u}{1+x} + B\frac{u^2}{(1+x)^2} + \ldots.\right\} \text{ oder}$$

$$(1+x+u)^p = (1+x)^p + A(1+x)^{p-1}.u + B(1+x)^{p-2}.u^2 + \ldots\ldots.. \quad (3)$$

*) Indem man statt der einfachen veränderlichen Gröfse x ein Binom $x+u$ setzt (der veränderlichen x einen Zuwachs beilegt), kommt auf beiden Seiten statt x eine zweiteilige Gröfse $x+u$, wodurch eine weitere Entwickelung ermöglicht wird, die man nach Potenzen von u fortschreiten lassen kann. Durch diesen einfachen Kunstgriff erhält man zwei verschieden geformte, nach u fortschreitende Reihen, die einander gleich sein müssen &c.

Die rechten Seiten in (2) und (3) sind Ausdrücke für eine und dieselbe Gröfse, nur in verschiedener Form, was gerade beabsichtigt wurde. Sie müssen also, wenn man für x einen ganz beliebigen Wert gesetzt denkt, immer noch für jeden Wert von u einander gleich sein, daher (§ 64)

$$A(1+x)^{p-1} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots.$$

Multipliziert man beiderseits mit $1+x$, so ist:

$$A(1+x)^p = (1+x)(A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots)$$

oder für $(1+x)^p$ die Reihe aus (1) gesetzt und beiderseits die Multiplikationen ausgeführt, kommt:

$$A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + \ldots = A + \begin{array}{c|}2B\\+A\end{array}\, x + \begin{array}{c|}3C\\+2B\end{array}\, x^2 + \begin{array}{c|}4D\\+3C\end{array}\, x^3 + \ldots..$$

Diese Gleichung mufs für jeden Wert von x bestehen, mithin ist (weil $A=p$):

$$2B + A = A^2, \text{ woraus } B = \frac{A(A-1)}{1\,.\,2} = \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}$$

$$3C + 2B = AB \quad \text{„} \quad C = \frac{B(A-2)}{3} = \frac{p(p-1)(p-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$4D + 3C = AC \quad \text{„} \quad D = \frac{C(A-3)}{4} = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

Diese leichte Rekursionsregel springt in die Augen. Daher endlich

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}\,.\,x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,x^3 + \ldots$$

70.

Das in § 27 entdeckte merkwürdige Gesetz, nach welchem für ganze positive Exponenten die Binomial-Koeffizienten sich bilden, gilt also ganz allgemein, nämlich auch für negative und Bruchexponenten. Es leuchtet aber ein, dafs für solche Exponenten die Reihe nie endlich sein kann, vielmehr eine unendliche wird, jedoch für jeden Wert von $1 > x > -1$ stets konvergent, also brauchbar ist. Denn, dividiert man vom 2. Gliede an jedes Glied durch das vorhergehende, so werden

die Quotienten px, $\frac{p-1}{1.2}.x, \ldots\ldots \frac{p-n}{n+1}x$ immer kleiner und für $n=\infty$, $=-x$, weil $\frac{p-n}{n+1}x=\frac{\frac{p}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}x$ und $\frac{\frac{p}{\infty}-1}{1+\frac{1}{\infty}}x=-x$ (§ 61).

Aus $(1+x)^p$ oder $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ läfst sich nun auch leicht $(a+x)^{\frac{m}{n}}$ bilden; denn dieser Ausdruck ist

$$=\left[a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \text{ und also}$$

$$(a+x)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}.\frac{x}{a}+\frac{\frac{m}{n}.\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1\;.\;2}.\frac{x^2}{a^2}+\ldots\right)$$

$$(a+x)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}.x+\frac{m}{1}\frac{(m-n)}{2.n^2}a^{\frac{m}{n}-2}x^2+\ldots$$

71.

Aufgabe. Man entwickele folgende Potenzen in Reihen: $(1\pm x)^{\frac{1}{2}}$; $(1\pm x)^{\frac{1}{3}}$; $(1\pm x)^{-\frac{1}{2}}$; $(1+x)^{\frac{1}{n}}$; $(1-x)^{-1}$; $(1+x)^{-n}$

Auflösung. Man findet:

$$(1\pm x)^{\frac{1}{2}}=1\pm\tfrac{1}{2}x-\frac{1.1}{2.4}x^2\pm\frac{1.1.3}{2.4.6}x^3-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}x^4\pm-\pm-\ldots\ldots$$

$$(1\pm x)^{\frac{1}{3}}=1\pm\tfrac{1}{3}x-\frac{1.2}{3.6}x^2\pm\frac{1.2.5}{3.6.9}x^3-\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}x^4\pm-\pm\ldots\ldots$$

$$(1\pm x)^{-\frac{1}{2}}=1\mp\tfrac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2\mp\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4\mp\ldots\ldots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}x-\frac{n-1}{2n^2}x^2+\frac{(n-1)(2n-1)}{2\;.\;3\;.\;n^3}x^3-\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{2\;.\;3\;.\;4\;.\;n^4}x^4+\ldots$$

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\ldots$$

$$(1+x)^{-n}=1-nx+\frac{n(n+1)}{1\;.\;2}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\;.\;2\;.\;3}x^3+\ldots$$

72.

Obgleich die Wichtigkeit des binomischen Lehrsatzes darin liegt, dafs er zur Begründung anderer wichtiger Sätze dient, so wollen wir doch beiläufig noch an einem Beispiel zeigen, wie man ihn, in Ermangelung von Logarithmentafeln, benutzen könnte, um aus einer gegebenen Zahl eine beliebige Wurzel zu ziehen. Es soll z. B. $\sqrt[3]{10}$ gefunden werden.

Man zerlege die gegebene Zahl in zwei solche Teile, dafs aus dem gröfsern Teil die Wurzel rational wird.

Es ist z. B. $10 = 8 + 2 = 8(1 + \frac{1}{4})$. Also $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{4})}$, mithin:

$$\sqrt[3]{10} = 2(1 + \tfrac{1}{4})^{\frac{1}{3}} = 2\left(1 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} - \frac{1.2}{3.6} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{1.2.5}{3.6.9} \cdot \frac{1}{4^3} - + \ldots\right)$$

Je mehr Glieder dieser konvergenten Reihe man addiert, je genauer erhält man $\sqrt[3]{10}$. Durch kleine Kunstgriffe könnte man die Reihe noch viel konvergenter machen. Bestimmt man z. B. für $\sqrt[3]{10}$ vorläufig die ersten Stellen $= 2{,}1544\ldots$ und verwandelt diesen Wert durch die Kettenbrüche in den Näherungswert $\frac{28}{13}$, so ist also sehr nahe $\left(\frac{28}{13}\right)^3 = 10$, oder genau $\left(\frac{28}{13}\right)^3 + u = 10$, folglich $u = \frac{18}{2197}$. Jetzt ist $\sqrt[3]{10}$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{28}{13}\right)^3 + \frac{18}{2197}} = \frac{28}{13}\sqrt[3]{1 + \frac{9}{10976}} = \frac{28}{13}\left[1 + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{9}{10976} - \tfrac{1}{9} \cdot \left(\frac{9}{10976}\right)^2 + \frac{5}{81} \cdot \left(\frac{9}{10976}\right)^3 - \ldots\right],$$

und es genügen diese 4 Glieder, um $\sqrt[3]{10}$ auf 14 Dezimalstellen richtig zu erhalten.

Der binomische Lehrsatz hat aber, wie gesagt, einen ganz andern und wichtigern Zweck, als die Wurzeln aus Zahlen zu ziehen, was viel bequemer vermittelst der Logarithmen geschieht.

Exponentialreihe.

73.

Die Funktion a^x heifst Exponential-Funktion. In derselben ist die Basis $a > 1$ eine konstante, der Exponent x aber eine

veränderliche Gröfse. Es ist von grofser Wichtigkeit, auch diese Funktion in eine nach ganzen positiven Potenzen des Exponenten fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Ist überhaupt eine solche Reihe möglich, so mufs (weil für $x=0$, $a^0=1$ ist) ihr erstes Glied notwendig 1 sein. Wir setzen also

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots\ldots\ldots (1)$$

Wenden wir jetzt wieder den im § 69 mitgeteilten Kunstgriff an und setzen $x+u$ statt x, so ist:

$$a^{x+u} = 1 + A(x+u) + B(x+u)^2 + C(x+u)^3 + \ldots$$

Entwickeln wir die rechte Seite nur so weit, dafs die Glieder mit u in der ersten Potenz in eins zusammengefafst werden können und setzen für die mit-erscheinende Reihe $1 + Ax + Bx^2 + \ldots.$ die Gröfse a^x aus (1), so ist, wenn man den entstehenden zusammengesetzten Koeffizient von u^2 der Kürze wegen M setzt:

$$a^{x+u} = a^x + (A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots)u + Mu^2 + \ldots. (2)$$

Nun ist aber auch: $a^{x+u} = a^x \,.\, a^u = a^x\,(1 + Au + Bu^2 + \ldots)$ mithin auch

$$a^{x+u} = a^x + Aa^x u + Ba^x u^2 + Ca^x u^3 + \ldots\ldots (3)$$

Die rechten Seiten für (2) und (3) sind Ausdrücke für eine und dieselbe Gröfse und müssen für jedes u einander gleich sein, daher müssen auch (§ 64) die Koeffizienten der 1. Potenz von u einander gleich sein:

$$Aa^x = A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots$$

oder linker Hand für a^x die Reihe aus (1) gesetzt und mit A multipliziert, ist für jedes x:

$$A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + \ldots = A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots$$

hieraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l} A = A \\ 2B = A^2 \\ 3C = AB \\ 4D = AC \\ \&c. \end{array}\right\} \text{mithin: } \begin{array}{l} B = \dfrac{A^2}{1.2} \\ C = \dfrac{AB}{3} = \dfrac{A^3}{1.2.3} \\ \text{„}\quad D = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{A^4}{1.2.3.4} \end{array}$$

Es ist also:

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1\,.\,2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \frac{A^4x^4}{1.2.3.4} + \ldots. \quad (4)$$

Hätten wir den ersten ganz unbestimmt gebliebenen Koeffizienten A, so hätten wir auch die übrigen. Wie aber diesen finden? Dafs er von der Basis abhängt und sich mit dieser ändert, ist klar; auch läfst sich leicht eine Beziehung zwischen ihm und der Basis aufstellen. Da nämlich die Exponential-Reihe (4) für jeden Wert von x gelten mufs, so setze man $x=1$, dann ist

$$a = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots. \quad (5)$$

Diese Beziehung ist aber offenbar nicht geeignet, um danach A aus a zu berechnen. Dies kann aber, wie wir gleich sehen werden, mit Hilfe der Logarithmen geschehen. Der Koeffizient A ist jedenfalls durch die Basis a bestimmt. Aber auch umgekehrt ist die Basis a durch A bestimmt, und zufolge Gleichung (5) durch eine konvergente Reihe zu finden (§ 61). Unter allen Werten von a mufs es einen solchen geben, für welchen der dadurch bestimmte Koeffizient $A=1$ wird. Bezeichnen wir also die für $A=1$ bestimmte Basis mit e, so ist, indem man in (5) $A=1$ setzt:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \quad (6)$$

$$e = 2{,}7182818284590 45\ldots.$$

Setzen wir also in (4) e statt a, so haben wir (weil für diese Basis e der Koeffizient $A=1$ ist) vorläufig doch eine Exponentialgröfse in eine Reihe verwandelt, nämlich:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wo nun aber die Basis e die bestimmte Zahl 2,71828... bedeutet.

Um die Exponentialgröfse für jede andere Basis a in eine Reihe verwandeln zu können, bringen wir Gleichung (7) in folgende Form:

$$e^{ux} = 1 + ux + \frac{(ux)^2}{1\,.\,2} + \frac{(ux)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

oder

$$(e^u)^x = 1 + x.u + \frac{1}{1.2}(x.u)^2 + \frac{1}{1.2.3}(x.u)^3 + \ldots. (8)$$

Setzt man $e^u = a$, so ist, wenn die Briggsschen Logarithmen mit „log" bezeichnet werden:

$$u \log e = \log a \text{ oder}$$

$$u = \frac{\log a}{\log e}.$$

Mit diesen Ausdrücken verwandelt sich (8) in

$$a^x = 1 + x.\frac{\log a}{\log e} + \frac{1}{1.2}\left(x.\frac{\log a}{\log e}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}.\left(x.\frac{\log a}{\log e}\right)^3 + \ldots$$

welche Reihe für jedes endliche a und x konvergent, und worin $\log e = \log 2{,}718281828 = 0{,}4342944819\ldots.$ ist.

74.

Bei allen wirklichen logarithmischen Rechnungen sind die Briggsschen Logarithmen, bei welchen bekanntlich 10 die Basis ist, wegen der leicht zu bestimmenden Kennziffer, die bequemsten und immer ausreichend. In der höhern Mathematik aber, jedoch nur in der Theorie, stellen sich noch andere Logarithmen ein, welche die vorhin gefundene Zahl e $(= 2{,}71828\ldots)$ zur Basis haben, und zur Unterscheidung von den Briggsschen die natürlichen Logarithmen heifsen und durch „log. nat." oder kürzer mit dem einfachen Buchstaben l bezeichnet werden.

Weil nun in jedem Logarithmensystem der Logarithmus von $0 = -\infty$; von $1 = 0$, und von der Basis $= 1$ ist, so ist auch, wenn man sich das natürliche Logarithmensystem, dessen Basis e ist, berechnet denkt,*) log. nat. $0 = -\infty$ oder kürzer $l0 = -\infty$; $l1 = 0$; $le = 1$ (weil $e^{-\infty} = 0$; $e^0 = 1$; $e^1 = e$). Nehmen wir also in der vorhin gefundenen Exponentialreihe statt der

*) Wir werden in § 77 zeigen, wie man in den seltenen Fällen, wo man von einer Zahl den natürlichen Logarithmus wirklich haben mufs, denselben leicht vermittelst der Briggsschen Logarithmen finden kann.

Briggsschen Logarithmen die natürlichen, so schreibt man diese Reihe $\left(\text{weil } \frac{\log. a}{\log. e} = \frac{\log. \text{nat}. a}{\log. \text{nat}. e} = \frac{l\,a}{l\,e} = \frac{l\,a}{1}\right)$ einfacher so:

$$a^x = 1 + x\,.\,la + \frac{(x\,.\,la)^2}{1\,.\,2} + \frac{(x\,.\,la)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

Logarithmische Reihe.

75.

Obgleich keine Logarithmen-Systeme mehr zu berechnen sind, indem die Arbeit schon geschehen, so ist es doch für die Theorie wichtig, auch die logarithmischen Funktionen log. $(1+x)$ und $l(1+x)$ in Reihen zu entwickeln.*) Wir nehmen zuerst letztere Funktion, nämlich den natürlichen Logarithmus, dessen Basis e. Dem Begriffe der Logarithmen zufolge ist nun: $(1+x)^n = e^{n\,.\,l\,(1+x)}$**) und, indem man für die rechte Seite die entsprechende Reihe setzt (Gleich. 7, § 73):

$$(1+x)^n = 1 + n\,l\,(1+x) + \frac{[n\,l\,(1+x)]^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

$$\frac{(1+x)^n - 1}{n} = l\,(1+x) + \frac{n\,.\,[l\,(1+x)]^2}{1\,.\,2} + \ldots \quad (1)$$

Ferner ist auch für $1 > x > -1$, für jeden Wert von n (§ 69):

$$(1+x)^n - 1 = nx + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots$$

$$(1+x)^n - 1 = nx - \frac{n\,(1-n)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{n(1-n)\,(2-n)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 - \ldots$$

$$\frac{(1+x)^n - 1}{n} = x - (1-n)\,.\,\frac{x^2}{2} + (1-n)\left(1 - \frac{n}{2}\right)\,.\,\frac{x^3}{3} - \ldots \quad (2)$$

---

*) Der Logarithmus einer einteiligen Gröſse, nämlich lx, läſst sich nicht in eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, weil eine solche Reihe für $x=0$ und für $x=1$ nicht $-\infty$ und 0 geben kann.

**) Denn nimmt man beiderseits die natürlichen Logarithmen, so hat man: $n\,.\,l(1+x) = n\,.\,l(1+x)\,.\,le = n\,.\,l(1+x)$, weil $le = 1$. Die hier folgende kurze Ableitung der logarithm. Reihe hat zuerst Cauchy gegeben. (Cours d'analyse.)

Die Reihen (1) und (2) sind Ausdrücke für eine und dieselbe Gröfse, sie müssen also für $x<1$ für jeden positiven Wert von n gleich sein, daher:

$$l(1+x)+\frac{n[l(1+x)]^2}{1\,.\,2}+\ldots=x-(1-n)\,.\,\frac{x^2}{2}+(1-n)\left(1-\frac{n}{2}\right).\frac{x^3}{3}-\ldots$$

Läfst man n bis zu Null abnehmen, so ist

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-+\ldots\ldots.(3)$$

Diese sogenannte logarithmische Reihe ist aber, wie man sieht, nur konvergent für $x \leqq 1$.*)

*) Will man diese logarithmische Reihe nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten ableiten, so setze man, weil das erste Glied den Faktor x enthalten mufs (indem für $x=0$ auch $l(1+x)=0$):

$$l(1+x)=ax+bx^2+cx^3+\&c.$$

Die Koeffizienten a, b, c, ... sind durch die Basis des Logarithmen-Systems bestimmt. Nehmen wir das sogenannte natürliche System, dessen Basis $e=2{,}7182\ldots$, so ist auch, weil die fingierte Reihe der natürliche Logarithmus von der Zahl $1+x$ sein soll:

$$1+x=e^{ax+bx^2+cx^3+\ldots}\text{ oder [§ 73, (7)]:}$$

$$1+x=1+ax+bx^2+\ldots+\frac{(ax+bx^2+\ldots)^2}{1\,.\,2}+\frac{(ax+bx^2+\ldots)^3}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$1+ax+\left.\begin{array}{l}b\\ +\frac{a^2}{1.2}\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}c\\ +\frac{2ab}{1.2}\\ +\frac{a^3}{1.2.3}\end{array}\right|x^3+\ldots$$

Hieraus ergiebt sich zuerst $a=1$ (§ 64). Die übrigen Koeffizienten bestimmt man nun leichter durch den § 69 gezeigten Kunstgriff. Aus:

$$l(1+x)=x+bx^2+cx^3+dx^4\,\&c.\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\text{folgt: } l(1+x+u)=(x+u)+b(x+u)^2+\ldots$$

$$l(1+x+u)=\begin{cases}x+bx^2+cx^3+dx^4+\ldots\\(1+2bx+3cx^2+\ldots)u+Mu^2+\ldots\end{cases}$$

$$l(1+x+u)=l(1+x)+(1+2bx+3cx^2+\ldots)u+Mu^2+\ldots(2)$$

Nun ist auch: $1+x+u=(1+x)\left(1+\frac{u}{1+x}\right)$, mithin:

$l(1+x+u)=l(1+x)+l\left(1+\frac{u}{1+x}\right)$ oder indem man in (1) $\frac{u}{1+x}$ statt x setzt:

$$l(1+x+u)=l(1+x)+\frac{u}{1+x}+\frac{b\,.\,u^2}{(1+x)^2}+\ldots\ldots\ldots(3)$$

Setzt man $x=1$, so ist:

$$l2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+-\ldots.$$

oder durch Addition von je 2 Gliedern:

$$l2=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{7.8}+\ldots+\frac{1}{(2n\quad 1).2n}+\ldots$$

Diese Reihe für $l2$ ist ein wahres Muster von schlechter Konvergenz. Um ihre Summe nur bis auf die siebente Dezimale genau zu erhalten, müfste man mehrere Tausend Glieder addieren, da schon das 1582. Glied $=\frac{1}{3163.3164}=0{,}0000001$ ist und die Summe der zunächst folgenden Glieder, obgleich dieselben erst in der 8. Dezimale 9 Einheiten enthalten, doch immer grofsen Einflufs auf die letzten Stellen des 7stelligen Dezimalbruchs ausüben müssen.

76.

Beiläufig wollen wir hier noch zeigen, wie sich aus der logarithmischen Reihe eine sehr konvergente Reihe ableiten läfst, nach welcher man, wenn es noch erforderlich wäre, sowohl die natürlichen, als auch die Briggsschen Logarithmen ohne Vergleich leichter berechnen könnte, als nach der, in der Algebra gezeigten, elementaren Methode.

Setzen wir in der Reihe

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Die Reihen (2) und (3) müssen für jeden Wert von u einander gleich sein, daher:

$$\frac{1}{1+x}=1+2bx+3cx^2+4dx^3+\ldots$$

Multipliziert man beiderseits mit $1+x$, so ist:

$$1=\begin{cases}1+2b & |x+3c & |x^2+4d & |x^3+\ldots \\ \quad\;\, 1 & |\;+2b & |\;\;+3c & |\;\;+\ldots\end{cases}$$

$2b+1=0$, $3c+2b=0$ &c., woraus: $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{4}$ &c. also:

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\ldots$$

$-x$ statt x, so ist auch (indem man in (1), (2), (3) § 75, $-x$ statt $+x$ gesetzt denkt):

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

welche ebenfalls für $x < 1$ konvergent ist und ein negatives Resultat giebt, weil die Logarithmen von echten Brüchen negativ sind.

Subtrahiert man beide Gleichungen und beachtet, dafs $l(1+x) - l(1-x) = l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (Algebra § 278), so kommt

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right) \ldots\ldots (3)$$

Setzen wir hierin $\frac{1+x}{1-x} = z$, so ist $x = \frac{z-1}{z+1}$ und

$$lz = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\} \ldots (4)$$

Ist $l.p$ bekannt, so läfst sich aus (3) für $l.(p+1)$ eine sehr schnell konvergierende Reihe ableiten, wenn man $\frac{1+x}{1-x} = \frac{p+1}{p}$, also $x = \frac{1}{2p+1}$ setzt, denn dann ist

$$l\left(\frac{p+1}{p}\right) = 2\left[\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{3(2p+1)^3} + \ldots\right]$$

oder weil $l\frac{p+1}{p} = l(p+1) - lp$:

$$l(p+1) = lp + 2\left[\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{3(2p+1)^3} + \frac{1}{5(2p+1)^5} + \ldots\right] \ldots (5).$$

Sind z. B. $l2$ und $l3$ bekannt, so ist $l.12 = l(2^2.3) = l(2^2) + l3 = 2l2 + l3$ und (5) giebt nun:

$$l(12+1) = l12 + 2\left[\frac{1}{2.12+1} + \frac{1}{3(2.12+1)^3} + \ldots\right], \text{ d. i.}$$

$$l13 = l12 + 2\left[\frac{1}{25} + \frac{1}{3.25^3} + \frac{1}{5.25^5} + \ldots\right].$$

Offenbar wird Reihe (5) desto konvergenter, je gröfser p ist.

Aber auch schon mit den Reihen (1), (2), (3) lassen sich die natürlichen Logarithmen aller ganzen Zahlen in sehr kurzer Zeit durch äufserst schnell konvergierende Reihen berechnen.

Aus (3) findet man nämlich mit $x=\frac{1}{10}$:

$$l\frac{11}{9}=2\left(0{,}1+\frac{0{,}001}{3}+\frac{0{,}00001}{5}+..\right)=0{,}20067\ 06955.$$

$x=\frac{1}{120}$ giebt aus (1):

$$l\frac{121}{120}=\frac{1}{120}-\frac{1}{2.120^2}+\frac{1}{3.120^3}-\ldots.=0{,}00829\ 88028$$

und aus (2) mit Benutzung derselben Glieder $l\frac{119}{120}$.

$x=\frac{1}{80}$ giebt aus (1) $l\frac{81}{80}=0{,}01242\ 25200$ und aus (2) $l\frac{79}{80}$;

$x=\frac{1}{100}$ aus (2) $l\frac{99}{100}=-0{,}01005\ 03359$ und aus (1) $l\frac{101}{100}$.

Nun ist $l\frac{120}{81}=l\left[\left(\frac{11}{9}\right)^2:\frac{121}{120}\right]=2\,l\frac{11}{9}-l\frac{121}{120}=0{,}39304\ 25881$;

$$l\frac{3}{2}=l\left(\frac{120}{81}\cdot\frac{81}{80}\right)=l\frac{120}{81}+l\frac{81}{80}=0{,}40546\ 51081.$$

$$l5=l\left[\left(\frac{3}{2}\right)^4:\frac{81}{80}\right]=4\,l\frac{3}{2}-l\frac{81}{80}=1{,}60943\ 79124;$$

$$l11=l\frac{99}{100}+2\left(l5-l\frac{3}{2}\right)=2{,}39789\ 52728;$$

$$l9=l\left(11:\frac{11}{9}\right)=l11-l\frac{11}{9}=2{,}19722\ 45773;$$

$$l3=l\sqrt{9}=\frac{l9}{2}=1{,}09861\ 22887;$$

$$l2=l\left(3:\frac{3}{2}\right)=l3-l\frac{3}{2}=0{,}693\ 1471806;$$

$$l10=l2+l5=2{,}30258\ 50930.$$

$x=\frac{1}{2400}$ giebt aus (1) $l\frac{2401}{2400}=l[7^4:(2^5.3.5^2)]$, womit nun auch $l7$ bekannt ist.

$l(1\pm\frac{1}{1000})$ führt zu $l13$ und $l37$.

$l\frac{119}{120}$ (s. ob.) führt zu $l17$,

$l\left(1-\frac{1}{400}\right)$ zu $l19$,

$l\left(1\mp\frac{1}{300}\right)$ zu $l23$ und $l43$,

$l\left(1\mp\frac{1}{27000}\right)$ zu $l29$ und $l67$,

$l\left(1\mp\frac{1}{900}\right)$ zu $l31$ und $l53$,

$l\left(1-\frac{1}{1600}\right)$ zu $l41$,

$l\left(1\mp\frac{1}{800}\right)$ zu $l47$ und $l89$,

$l\left(1+\frac{1}{2500}\right)$ zu $l61$,

$l\left(1-\frac{1}{3600}\right)$ zu $l59$,

$l\left(1+\frac{1}{200}\right)$ zu $l67$,

$l\left(1-\frac{1}{12000}\right)$ zu $l71$,

$l\left(1\mp\frac{1}{4600}\right)$ zu $l73$ und $l107$,

$l\,\frac{79}{80}$ (s. ob.) zu $l79$,

$l\left(1-\frac{1}{250}\right)$ zu $l83$,

$l\left(1+\frac{1}{3200}\right)$ zu $l97$,

$l\frac{101}{100}$ (s. ob.) zu $l101$,

$l\left(1+\frac{1}{6900}\right)$ zu $l103$,

$l\left(1-\frac{1}{1200}\right)$ zu $l109$,

$l\left(1+\frac{1}{20000}\right)$ zu $l113$,

$l\left(1+\frac{1}{8000}\right)$ zu $l127$.

77.

Obgleich in der höheren Mathematik immer nur natürliche Logarithmen vorkommen, und dieses natürliche System nach den in § 76 abgeleiteten Reihen auch wirklich berechnet worden ist, so kann man dennoch das natürliche Logarithmensystem recht gut entbehren, indem erstens für wirkliche logarithmische Zifferrechnungen die gewöhnlichen Briggsschen Logarithmen viel bequemer sind, und zweitens in den seltneren Fällen, wo die natürlichen Logarithmen wirklich selbst erforderlich sind, dieselben leicht aus den Briggsschen, sowie auch umgekehrt die Briggsschen Logarithmen aus den natürlichen abgeleitet werden können. Dazu ist nur die Kenntnis des natürlichen Logarithmus von 10 erforderlich, den wir zu diesem Zweck in § 76 eigens berechnet haben.

Bedeutet nämlich n den natürlichen und b den Briggsschen Logarithmus einer und derselben Zahl N, so dafs also $10^b =$ N und auch $e^n =$ N, mithin $10^b = e^n$ ist, so kommt, wenn man

beiderseits die natürlichen Logarithmen nimmt und beachtet, dafs $le = 1$,

$$b \,.\, l10 = n$$

$$\text{hieraus: } b = \frac{1}{l10} \,.\, n$$

d. h. man erhält den Briggsschen Logarithmus b einer beliebigen Zahl N, indem man den natürlichen Logarithmus n derselben Zahl mit dem Modulus M (oder m) $= \frac{1}{l10} = 0{,}4342944819$ multipliziert, und umgekehrt erhält man den natürlichen Logarithmus n einer beliebigen Zahl, wenn man den Briggsschen Logarithmus b derselben Zahl durch den Modulus $\frac{1}{l10} = 0{,}43429\ldots$ dividiert, oder also auch mit $l10 = 2{,}302585092994$ multipliziert. Wegen ihrer gröfsern Basis (10) sind die Briggsschen Logarithmen offenbar immer kleiner, als die natürlichen (die Zahl 1 ausgenommen, indem sowohl $\log 1 = 0$, als auch $l1 = 0$).

78.

Setzt man in der in § 74 erhaltenen Reihe $x = 1$, so ergiebt sich

$$a = 1 + la + \frac{(la)^2}{1 \,.\, 2} + \frac{(la)^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots.$$

Mittels dieser Reihe läfst sich unmittelbar aus einem gegebenen Logarithmus der zugehörige Numerus finden. Ist z. B. $\log a = 0{,}0007$, so ist (§ 77) $la = 2{,}302585 \,.\, 0{,}0007 = 0{,}00161181$ und

$$a = 1 + 0{,}00161181 + \frac{0{,}00161181^2}{1 \,.\, 2} + \ldots = 1{,}00161311.$$

Konvergiert dagegen für ein gröfseres la die Reihe nicht schnell genug, so sucht man zunächst für a mittels der Kettenbrüche den Näherungswert $\frac{b}{c}$, der in gewünschter Weise zu dem Numerus a selbst führt, wenn die Logarithmen von b und c schon bekannt sind. Denn setzt man $a = \frac{b}{c} \,.\, y$, so ist y sehr wenig von 1 verschieden, ly mithin sehr klein und es ist

$$la = l\,\frac{b}{c} + ly \text{ oder } ly = la + lc - lb.$$

Dieser Wert für ly führt mittels der ungemein schnell konvergierenden Reihe

$$y = 1 + ly + \frac{(ly)^2}{1\,.\,2} + \ldots.$$

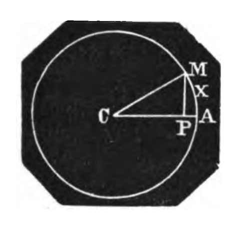
zu dem Numerus y und es ergiebt sich alsdann

$$a = \frac{by}{c}$$

Kreisfunktionen.



79.



Setzt man den Radius CM = 1, so ist für einen Bogen $\widehat{AM} = x$ schon die auf CA senkrechte Linie MP der Sinus und CP der Cosinus dieses Bogens x. Die Frage ist nun, ob sowohl $\sin x$ als $\cos x$, beide als Funktionen des veränderlichen Bogens x gedacht, sich in Reihen entwickeln lassen, die nach ganzen positiven Potenzen des Bogens x fortschreiten*).

Fingieren wir vorläufig diese Reihen und setzen

$$\sin x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$
$$\cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

so ist zuvor klar, dafs, wenn beide Reihen überhaupt möglich sind, notwendig $A_0 = 0$ und $a_0 = 1$ sein mufs. Denn da für jeden Wert von x rechter Hand dasselbe Resultat kommen mufs, wie linker Hand, so setze man $x = 0$, so kommt (weil dann alle mit x, $x^2 \ldots$ multiplizierten Glieder $= 0$ sind) $\sin 0 = A_0$

---

*) Den Bogen x mufs man sich hier nicht in Graden, sondern in Teilen des Halbmessers ausgedrückt denken (Trigonometrie § 60). Ist der Radius = 1, so ist der Umfang $= 2\pi$, welche Zahl also an Stelle der 360° zu setzen ist. Der Bogen von 1° hat mithin eine Länge von $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ und kämen z. B. auf den Bogen AM 18°, so wäre die Länge desselben $18\,.\,\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{10}$ $= 0{,}314159265$. Der Grund, dafs hier auch der Bogen x in Teilen des Halbmessers ausgedrückt werden mufs, liegt darin, weil in jeder Gleichung alle Glieder gleichartig sein müssen und die trigonometrische Funktion eines Bogens, wie $\sin x$, $\cos x$ &c., als unbenannte Zahl (Trigonometrie § 7) nicht gleich einer Summe von Graden sein kann.

und cos $0 = a_0$, woraus, weil sin $0 = 0$ und cos $0 = 1$, auch $A_0 = 0$ und $a_0 = 1$. Beide Reihen wären also etwas näher bestimmt

$$\sin x = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots (1)$$
$$\cos x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots (2)$$

Aus der Gleichung (1) folgt

$$\frac{\sin x}{x} = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots$$

Nun ist zwar (weil der Sinus kleiner als der Bogen) der Quotient $\frac{\sin x}{x}$ immer ein echter Bruch, der aber der Einheit desto näher kommt, je kleiner der Bogen wird (Trigon. § 62). Läſst man also (in Gedanken) den Bogen x bis zum Verschwinden immer kleiner werden (bis zu Null konvergieren), so wird zu gleicher Zeit auch der Bruch $\frac{\sin x}{x}$ der Einheit immer näher und näher kommen und sie zuletzt (für $x = 0$) wirklich erreichen. Für $x = 0$ fallen aber rechter Hand alle Glieder in x weg, und es bleibt noch $\frac{0}{0} = A_1 = 1$. Der Koeffizient A_1 muſs also notwendig $= 1$ sein und Gleichung (1) ist

$$\sin x = x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \ldots (3).$$

Setzt man hier $-x$ statt x, so entsteht

$$-\sin x = -x + A_2 x^2 - A_3 x^3 \ldots\ldots$$

Diese Gleichung von (3) subtrahiert:

$$2 \sin x = 2x + 2 A_3 x^3 + 2 A_5 x^5 + \ldots \text{ oder}$$
$$\sin x = x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + \ldots\ldots (4).$$

Substituiert man in gleicher Weise in Gleichung (2) $-x$ für x, so erhält man

$$\cos x = 1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

und diese Gleichung zu (2) addiert:

$$2 \cos x = 2 + 2 a_2 x^2 + 2 a_4 x^4 + \ldots\ldots \text{ oder}$$
$$\cos x = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots\ldots (5).$$

80.

Die durch (4) und (5) noch näher bestimmte Form der Reihen für sin x und cos x kann nun einfacher

$$\sin x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \ldots$$
$$\cos x = 1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 + \ldots\ldots$$

gesetzt werden.

Um hier die noch unbestimmten Koeffizienten A, B ... a, b ... zu bestimmen, operieren wir folgendermafsen:

$$\sin x + \cos x = 1 + x + ax^2 + Ax^3 + bx^4 + \ldots$$

Setzen wir, um auf eine andere Form zu kommen, $x+z$ statt x, so ist auch

$$\sin(x+z)+\cos(x+z) = 1+(x+z)+a(x+z)^2+A(x+z)^3+\ldots\ldots\ldots$$

oder auch (Trigonometrie § 52, Formeln 55):

$$\left.\begin{array}{l}(\sin x+\cos x)\cos z+\\(\cos x-\sin x)\sin z\end{array}\right\} = 1+(x+z)+a(x+z)^2+A(x+z)^3+\ldots\ldots\ldots$$

Substituieren wir linker Hand die fingierten Reihen und entwickeln rechter Hand die Potenzen von $x+z$ nur so weit, dafs die Glieder mit z in der ersten Potenz zusammengefafst werden können, so haben wir

$$\left.\begin{array}{l}(1+x+ax^2+Ax^3+..)\ (\underline{1}+az^2+bz^4+..)\\(1-x+ax^2-Ax^3+..)\ (z+Az^3+Bz^5+.)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}1+x+ax^2+Ax^3+\ldots\\(1+2ax+3Ax^2+4bx^3+..)z+Mz^2+..\end{array}\right.$$

Das Produkt linker Hand enthält einen Teil, welcher der obersten Reihe rechter Hand gleich ist. Diese können wir also gegen die unterstrichene Einheit ($\underline{1}$) weglassen. Dividiert man dann beiderseits durch z, so hat man

$$\left.\begin{array}{l}(1+x+ax^2+Ax^3+..)\ (az+bz^3+\ldots\ldots..)\\(1-x+ax^2-Ax^3+..)\ (1+Az^2+Bz^4+..)\end{array}\right\} = 1+2ax+3Ax^2+\ldots+Mz+Nz^2+\ldots\ldots.$$

Denkt man für x einen beliebigen Wert gesetzt, so müssen noch für jeden Wert von z beiderseits gleiche Resultate kommen. Setzen wir also $z=0$, so mufs für jeden Wert von x

$$1-x+ax^2-Ax^3+bx^4-Bx^5+\ldots = 1+2ax+3Ax^2+4bx^3+5Bx^4+..$$

sein, mithin ist (§ 64)

$$2a = -1,\ 3A = a,\ 4b = -A,\ 5B = b,\ 6c = -B \text{ etc.}$$

$$\text{hieraus: } a = -\frac{1}{1.2},\ A = -\frac{1}{1.2.3},\ b = \frac{1}{1.2.3.4},$$

$$B = \frac{1}{1.2.3.4.5}\ \&c.$$

Die Koeffizienten ergeben sich also nach einer sehr übersichtlichen und einfachen Rekursionsregel. Es ist nämlich

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots \quad (6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - + \ldots \quad (7)$$

Nach diesen sehr konvergenten Reihen*) könnten nun, wenn es noch nötig wäre, die trigonometrischen Funktionen leicht berechnet werden. Aus den Lehren der Trigonometrie ist bekannt, dafs dieses nur für den ersten Quadranten (eigentlich nur von 0 bis $\frac{\pi}{4}$) zu geschehen braucht, indem für gröfsere Bögen die Werte der trigonometrischen Funktionen periodisch wiederkehren. Dafs nun aber die für $\sin x$ und $\cos x$ gefundenen Reihen nicht blofs für den ersten Quadranten (was für den rein trigonometrischen Zweck genügend wäre), sondern auch für jeden beliebig grofsen Bogen gültig sind und alle Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ besitzen, wodurch zugleich die allgemeine Richtigkeit der Reihen bewiesen ist, wird sich in § 85 zeigen**).

Dividiert man die Reihen (6) und (7) nach den Regeln der Partialdivision, so ergiebt sich aus $\frac{\sin x}{\cos x}$ und $\frac{\cos x}{\sin x}$:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \ldots \quad (8)$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \ldots \quad (9)$$

---

*) Die Reihen sind für ein noch so grofses x doch stets konvergent. Denn wäre $x = 100$ (in Teilen des Halbmessers, in Graden also $= 100 \cdot \frac{180}{\pi}$ $= 5729{,}578$ Grad), so würden zwar die Glieder der Reihe

$$\sin 100 = 100 - 166666\tfrac{2}{3} + 8333333\tfrac{1}{3} - \ldots$$

zunächst immer gröfser, die Summe der Reihe müfste aber doch bis zu einem bestimmten Gliede, z. B. dem Gliede $-\frac{100^{199}}{1.2\ldots.199}$, welches $= -a$ gesetzt werden mag, eine endliche Zahl $= S$ sein. Die nun folgenden Glieder bilden alsdann die unendliche Reihe

$$+a \cdot \frac{100^2}{200.201} - a \cdot \frac{100^4}{200.201.202.203} + \ldots,$$

deren Glieder offenbar kleiner als die Glieder der Reihe $a \cdot \frac{1}{4} - a \cdot \frac{1}{4^2} + a \cdot \frac{1}{4^3} - \ldots$ sind. Die Summe der gegebenen Reihe ist mithin (s. § 64 b) eine endliche Zahl, die kleiner als $S + \frac{a}{4}(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} - \ldots\ldots) = S + \frac{a}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = S + \frac{a}{5}$ ist.

**) Es liefse sich dies auf ganz elementare Weise, jedoch weitläufiger, auch schon hier zeigen. Quadriert man z. B. beide Reihen, so ist die Summe ihrer Quadrate für jeden Wert von x immer $= 1$ &c.

Ferner ist $\sin(x+u) = \sin x \cos u + \cos x \sin u$

$$= \sin x \left(1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4!} \ldots\right) + \cos x \left(u - \frac{u^3}{3!} + \ldots .\right) \text{ oder}$$

$$\sin(x+u) = \sin x + u \cos x - \frac{u^2}{2} \sin x - \frac{u^3}{3!} \cos x + \frac{u^4}{4!} \sin x + \ldots . \quad (10)$$

In gleicher Weise ergiebt sich

$$\cos(x+u) = \cos x - u \sin x - \frac{u^2}{2} \cos x + \frac{u^3}{3!} \sin x + \ldots . \quad (11)$$

$\operatorname{tg}(x+u)$ kann wie vorher $\sin(x+u)$ durch Zerlegung oder durch Division der Reihen (10) und (11) bestimmt werden.

Man erhält $\operatorname{tg}(x+u) = \operatorname{tg} x + \frac{u}{\cos^2 x} + \frac{u^2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + \ldots . \quad (12)$

Ebenso $\cot(x+u) = \cot x - \frac{u}{\sin^2 x} + \frac{u^2 \cot x}{\sin^2 x} - \ldots . . \quad (13)$

Um den Bogen aus Sin. zu bestimmen, setzt man zunächst

$$x = \alpha \sin x + \beta \sin^2 x + \gamma \sin^3 x + \delta \sin^4 x + \ldots . .$$

Statt x: $-x$ gesetzt:

$$-x = -\alpha \sin x + \beta \sin^2 x - \gamma \sin^3 x + \ldots .$$

Die Differenz beider Gleichungen durch 2 dividiert giebt

$$x = \alpha \sin x + \gamma \sin^3 x + \varepsilon \sin^5 x + \ldots . \quad (14)$$

Setzt man nun in Gleichung (6) für x die rechte Seite der Gleichung (14), so ergiebt sich

$$\sin x = \alpha \sin x + \gamma \sin^3 x \ldots - \frac{1}{6}(\alpha \sin x + \gamma \sin^3 x + ..)^3 + \ldots .$$

oder $\sin x = \alpha \sin x + \left(\gamma - \frac{\alpha^3}{6}\right) \sin^3 x + \ldots$

Folglich ist $\alpha = 1$ und $\gamma - \frac{\alpha^3}{6} = 0$ oder

$$\gamma = \frac{\alpha^3}{6} = \frac{1}{6} \text{ u. s. w.}$$

Mit diesen Werten geht (14) über in:

$$x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{2.3} + \frac{1.3 \sin^5 x}{2.4.5} + \frac{1.3.5 \sin^7 x}{2.4.6.7} + \ldots (15)$$

Für x: $\frac{\pi}{2} - x$ gesetzt, giebt $\frac{\pi}{2} - x = \cos x + \frac{\cos^3 x}{2.3} \dots\dots$

oder $x = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{\cos^3 x}{2.3} - \dots\dots\dots$ (16)

Bogen x könnte zwar durch Umkehrung der Gleichung (8) aus tg x bestimmt werden (siehe nachstehende Anmerkung), wir geben jedoch in § 87 eine andere Ableitung.

Amerkung. Das Seite 88 zur Bestimmung von x aus $\sin x$ angewandte Verfahren ist unter dem Namen

Umkehrung der Reihen

bekannt. Ist allgemein

$$x = y + ay^2 + by^3 + cy^4 + \dots\dots\dots\dots \text{(Y)}$$

und soll y durch x ausgedrückt werden, so setze man

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots\dots\dots\dots \text{(Z)}$$

Z in Y eingesetzt, giebt

$$x + 0 . x^2 + 0x^3 \dots = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots$$
$$+ a(Ax + Bx^2 + Cx^3)^2 + b(Ax + Bx^2)^3 + \dots\dots$$

Nach Potenzen von x geordnet:

$$1 . x + 0 . x^2 + 0 . x^3 + \dots = Ax + (B + aA^2)x^2 + (C + 2a\,AB + bA^3)x^3 + \dots$$

Folglich ist I: $A = 1$; II: $B + aA^2 = 0$; III: $C + 2a\,AB + bA^3 = 0$. Aus II: $B = -a . A^2 = -a . 1^2$ (siehe I) $= -a$; aus III: $C = -2a\,AB - bA^3 = -2a . 1 . (-a) - b . 1^3 = 2a^2 - b$ u. s. w. Diese Werte in Z eingesetzt:

$$y = x - ax^2 + (2a^2 - b)x^3 - (c + 5a^3 - 5ab)x^4 + \dots\dots \text{(W)}$$

Beispiel. $l(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$ (s. S. 78). Um nun y aus $l(1 + y)$ zu erhalten, vergleiche man die vorstehend gegebene Reihe mit Y. Man findet $x = l(1 + y)$; $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{3}$; $c = -\frac{1}{4}$; ..

Diese Werte in W eingesetzt:

$$y = l(1 + y) - \left(-\frac{1}{2}\right) l^2(1 + y) + \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\right] l^3(1 + y) - \dots$$

$1 + y = z$, also $y = z - 1$ gesetzt:

$$z - 1 = lz + \frac{1}{2} l^2 z + \frac{1}{6} l^3 z + \dots \text{ oder}$$

$$z = 1 + lz + \frac{1}{2} l^2 z + \frac{1}{2.3} l^3 z + \frac{1}{2.3.4} l^4 z + \dots \text{(s. § 78, Zeile 3).}$$

Siebentes Buch.

Gebrauch der sogenannten imaginären Gröfsen und der sich daraus ergebenden Konsequenzen. Zurückführung jeder imaginären Funktion auf die einfache Form:

$$\alpha + \beta i$$

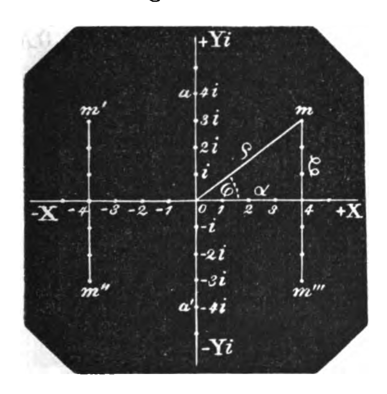
81.

Schon in der Buchstabenrechnung haben sich im Laufe der Rechnung manchmal die sogenannten imaginären (oder lateralen) Gröfsen eingestellt, und wir haben dort darauf aufmerksam gemacht, dafs diese Gröfsen in der höhern Mathematik eine sehr wichtige Rolle spielen, indem man vermittelst derselben, gleichnisweise, aber noch viel mehr, wie in der Trigonometrie vermittelst eines Hilfswinkels, über oftmals entgegentretende grofse Hindernisse wegsetzen und damit auf wichtige Entdeckungen kommen kann. Wir haben schon dort gezeigt, dafs man mit diesen Gröfsen nach den gewöhnlichen Regeln der Buchstabenrechnung ebenso gut rechnen kann, wie mit den sogenannten reellen Gröfsen. (Algebra §§ 325 und 326.) Hier wird es nun zum weitern Fortkommen notwendig, diese Sache wieder aufzunehmen. Was übrigens die eigentliche Metaphysik, sowie die reelle Bedeutung der sogenannten imaginären Gröfsen, welche zuerst Gaufs in ein helles Licht gesetzt hat, betrifft, so müssen wir den Leser, um hier den ebenen Gang nicht zu unterbrechen, auf den Anhang § 176 verweisen.

82.

Wir bezeichnen wieder mit Gaufs das Symbol*) $\sqrt{-1}$ der Kürze halber mit i. Um eine bestimmte Vorstellung mit dieser Gröfse i zu verbinden, wollen wir sie als Einheit einer neuen Zahlenreihe betrachten.

Alle vier Arten Zahlen, nämlich sowohl die sogenannten positiven und negativen reellen, als die sogenannten positiven und negativen imaginären, sowie auch die aus reellen und imaginären Zahlen zusammengesetzten (komplexen) Gröfsen, können wir nun, wie Gaufs gezeigt, folgendermafsen bildlich darstellen, gleichsam versinnlichen.



Man denke sich in einer unbegrenzten Ebene zwei aufeinander senkrechte Linien XX und YY und trage dann vom Durchschnittspunkte 0 aus die positiven reellen Zahlen auf 0 (+X), die negativen nach entgegengesetzter Richtung, dann seitwärts (lateral) die positiven imaginären Zahlen auf 0(+Yi) und die negativen wieder nach entgegengesetzter Richtung ab. So stellt z. B. der Punkt a (nämlich die Linie 0 a) die Zahl $4i$ dar, und in dem Punkte a' findet man die Zahl $-4i$, die Zahl $2\frac{1}{2}$ fällt in die Mitte zwischen 2 und 3, die Zahl $\sqrt{5}$ fällt ebenfalls zwischen 2 und 3, die Zahl $-\sqrt{2}.i = -1{,}414\,i$ liegt zwischen $-i$ und $-2i$ &c. Um die komplexen Gröfsen bildlich darzustellen, betrachte man die reelle Gröfse als Abscisse und den reellen Faktor von i als Ordinate. So stellen z. B. die beiden Linien $\overline{04}$ und $\overline{4m}$ die komplexe Gröfse $4+3i$ dar. In dem Punkte m' findet man die Gröfse $-4+3i$, in m'' die Gröfse $-4-3i$, in m''' die Gröfse $4-3i$.

---

*) Die Zeichen 1, 2, 3... —1, —2... sind ebensowohl nur Rechnungssymbole, wie die Zeichen i, $2i$, $3i$, ... $-i$, $-2i$.

83.

Da die Zahlenebene unbegrenzt ist, und ihre Punkte stetig aufeinander folgen, so giebt es keine reelle, imaginäre, oder komplexe Gröſse, welche sich nicht auf die eben gezeigte Weise darstellen lieſse*). Dasselbe kann aber auch durch Polarkoordinaten geschehen. Ist allgemein $\alpha + \beta i$ eine beliebige komplexe Gröſse, so ist α (z. B. die Linie 04) die Abscisse und β (z. B. die Linie $4m$) die Ordinate des Punktes in der Ebene, welche diese Gröſse darstellt. Ferner ist der sogenannte Modulus ϱ dieser komplexen Gröſse, welcher nichts anderes, als der Radius vector des erwähnten Punktes ist, durch die Gleichung $\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, und der Winkel φ, den dieser immer absolut (positiv) zu nehmende Modulus ϱ mit der Achse 0X macht, durch die Gleichung $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta}{\alpha}$ gegeben. Ferner hat man noch:

$$\alpha = \varrho \cos \varphi$$
$$\beta = \varrho \sin \varphi$$

Deshalb kann man auch immer setzen:

$$\alpha + \beta i = \varrho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

84.

Aus der Algebra (§ 325) ist bekannt, daſs:

$i = \sqrt{-1}$	$i^{4n+1} = \sqrt{-1} = i$
$i^2 = -1$ **)	$i^{4n+2} = -1$
$i^3 = -\sqrt{-1} = -i$	$i^{4n+3} = -\sqrt{-1} = -i$
$i^4 = 1$	$i^{4n+4} = 1$

Dies vorausgeschickt, gelangen wir nun durch Vermittelung der Gröſse i, indem wir dieselbe, sie gleichsam als eine Hilfs-

*) Die unbegrenzte Zahlenlinie hat sich also, als notwendige Folge unserer Denkgesetze, zu einer unbegrenzten Zahlenebene ausgedehnt. Man kommt deshalb leicht auf den Gedanken, ob es nicht auch in unsern Denkgesetzen liegen und die Notwendigkeit eintreten könnte, die Zahlenebene sich in einen Zahlenraum ausdehnen zu lassen. Gauſs ist jedoch nicht dieser Meinung. (S. Anhang § 176 am Ende.)

**) Denn $i^2 = (\pm\sqrt{-1})^2 = +(\sqrt{-1})^2 = -1$, da allgemein $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

gröfse betrachtend, mit den sogenannten reellen Gröfsen verbinden und, wie in der Algebra gezeigt, den einfachen Regeln der Arithmetik konsequent unterwerfen, zu sehr fruchtbaren Resultaten, welche wir ohne Benutzung dieser Gröfse i teils gar nicht, teils nur auf sehr grofsen Umwegen erhalten könnten.

85.

Setzen wir in der Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots . \quad (\S\ 73,\ 7)$$

ix statt x, so erhalten wir

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{1.2} + \frac{i^3x^3}{1.2.3} + \frac{i^4x^4}{1.2.3.4} + \frac{i^5x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

oder:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + - ..\right)$$
$$+ i\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - + ..\right.$$

Mittels der Gleichungen (6) und (7) in § 80 erhält man dafür

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \ldots\ldots\ldots\ldots (1)\,^{*})$$

Setzen wir hierin $-i$ statt $+i$, so ist:

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Um zu zeigen, dafs die beiden Reihen alle Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen cos x und sin x besitzen, mithin auch für jedes x gültig sind, und statt ihrer wirklich die Funktionen cos x und sin x gesetzt und aus den fertigen trigonometrischen Tafeln entnommen werden dürfen, multipliziere man die beiden Gleichungen (1) und (2) miteinander, so kommt erstlich

$$\cos^2 x + \sin^2 x = e^{ix}\ e^{-ix} = e^0 = 1$$

d. h. die Summe der Quadrate der beiden Reihen ist für jedes $\pm x$ immer $= 1$.

---

*) Setzt man in dieser Formel $x = \frac{\pi}{2}$, so ist $e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$. Also auch $\left(e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}}\right)^{\sqrt{-1}} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$. Mithin: $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$. Diesen merkwürdigen Ausdruck hatte schon Euler gefunden.

Multipliziert man die beiden Gleichungen

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{\pm iy} = \cos y \pm i \sin y$$

miteinander, so kommt

$$e^{i(x \pm y)} = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y + i (\sin x \cos y \pm \cos x \sin y)$$

Nun ist aber auch, $x \pm y$ als einen Bogen gedacht:

$$e^{i(x \pm y)} = \cos (x \pm y) + i \sin (x \pm y).$$

Beide für $e^{i(x \pm y)}$ erhaltenen komplexen Gröſsen müssen einander gleich sein. Sollen aber zwei komplexe Gröſsen einander gleich sein, mithin ihre bildliche Darstellung auf einen und denselben Punkt in der Zahlen-Ebene führen (§ 82), so müssen notwendig die reellen und die imaginären Teile einzeln einander gleich sein, daher die bekannten Beziehungen:

$$\cos (x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$
$$\sin (x \pm y) = \sin x \cos x \mp \cos x \sin y.$$

Anmerkung. Die Moduli der beiden komplexen Gröſsen (1) und (2) sind $\varrho = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$. Der Punkt in der unbegrenzten Ebene, dessen Lage durch die (komplexen) Gröſsen e^{ix} und e^{-ix}, nämlich $\cos x \pm i \sin x$, bestimmt ist, liegt also immer (wie groſs auch x sein möge) auf der mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Peripherie.

86.

Durch Addition und Subtraktion der beiden vorstehenden Gleichungen (1) und (2) ergeben sich für $\cos x$ und $\sin x$ die nur scheinbar imaginären Ausdrücke:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

87.

Die Division der beiden Gleichungen (1) und (2) § 85 giebt

$$e^{2ix} = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}$$

Beiderseits die natürlichen Logarithmen genommen und $\left(l\frac{1+i\operatorname{tg}x}{1-i\operatorname{tg}x}\right)$ nach Formel 3, § 76, entwickelt, indem man dort i tg x statt x setzt, kommt (weil alle geraden Potenzen von i reell):

$$2ix = 2\left(i\operatorname{tg}x + \frac{i^3\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{i^5\operatorname{tg}^5 x}{5} + \ldots\ldots\right)$$

$$2ix = 2i\left(\operatorname{tg}x + \frac{i^2\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{i^4\operatorname{tg}^5 x}{5}\ldots\ldots\right)$$

$$x = \operatorname{tg}x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}\ldots\ldots\ldots (1)$$

Diese Reihe ist konvergent für alle Werte von tg x, die nicht gröfser als 1 sind. Man kann also danach Bögen berechnen, deren Tangenten gegeben, und sie deshalb, wie Leibniz zuerst gezeigt hat, zur Berechnung der Zahl π (Kreisverhältnis) benutzen. Der mit der Einheit beschriebene Bogen, dessen Tangente $= 1$ ist, ist offenbar $\frac{\pi}{4}$. Setzt man also in obige Reihe tg $x = 1$, so mufs man $\frac{\pi}{4}$ statt x setzen, und man hat dann

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \ldots\ldots$$

Diese Leibnizsche Reihe ist zwar konvergierend, jedoch so aufserordentlich langsam, dafs man an tausend Glieder addieren müfste, um die Zahl π nur so genau zu erhalten, als Metius sie schon hatte. Es läfst sich jedoch durch einen kleinen Kunstgriff eine konvergentere Reihe daraus ableiten.

Euler betrachtete nämlich den halben Quadranten $\frac{\pi}{4}$ als Summe zweier anderer Bögen α und β, deren Tangenten also echte Brüche sind, für welche vorige Reihe stärker konvergiert. Nimmt man nun α so, dafs tg $\alpha = \frac{1}{2}$, so wird, weil $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ und also:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\text{oder: } \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \, . \operatorname{tg}\beta} = 1,$$

$$\text{woraus: } \operatorname{tg}\beta = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}.$$

Da also die Summe zweier Bögen α und β, deren Tangenten beziehlich $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind, $=\frac{\pi}{4}$ ist, so setze man in die Reihe (1) einmal $\frac{1}{2}$ und einmal $\frac{1}{3}$ statt $\operatorname{tg} x$ und addiere beide Resultate, so hat man:

$$\frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - + \cdots$$

Nach dieser Eulerschen Reihe liefse sich die Zahl π schon ohne viele Mühe berechnen. Um jedoch eine noch stärker konvergierende Reihe zu erhalten, dachte sich Machin einen Bogen u, dessen Tangente $=\frac{1}{5}$ ist, dann folgt aus $\operatorname{tg} u = \frac{1}{5}$, dafs (Trig. § 49) $\operatorname{tg} 2u = \frac{5}{12}$ und $\operatorname{tg} 4u = \frac{120}{119}$. Es ist also $4u > \frac{\pi}{4}$. Setzen wir nun $4u - \frac{\pi}{4} = v$, so ist

$$\operatorname{tg} v = \operatorname{tg}\left(4u - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \tfrac{1}{239}.$$

Mithin mufs man, weil $\frac{\pi}{4} = 4u - v$, in die Reihe (1) $\frac{1}{5}$ statt $\operatorname{tg} x$ setzen und den Betrag viermal nehmen, so hat man den Bogen $4u$, setzt man dann noch $\frac{1}{239}$ statt $\operatorname{tg} x$, so erhält man den Bogen v. Daher

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \cdots\right).$$

88.

Setzen wir in $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ (§ 85) nx statt x, so ist:

$$e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx;$$

da nun aber auch $e^{\pm inx} = (e^{\pm ix})^n = (\cos x \pm i \sin x)^n$, so hat man die folgende höchst merkwürdige und für die Folge sehr wichtige Formel, welche, wie Laplace glaubt, zuerst von Moivre gefunden worden, und auch dessen Namen führt, nämlich

$$(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx$$

gültig für jeden Wert von n.

Ferner folgt noch leicht, dafs $\left(\text{weil } e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}}\right)$:

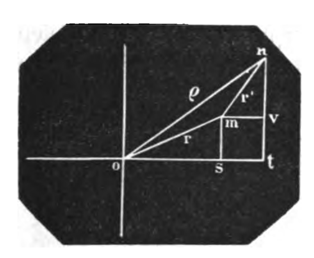
$$\frac{1}{\cos x \pm i \sin x} = \cos x \mp i \sin x$$

$$\frac{1}{(\cos x \pm i \sin x)^n} = (\cos x \mp i \sin x)^n = \cos nx \mp i \sin nx.$$

Die nachfolgenden Beispiele werden zeigen, wie man aufser $e^{\pm ix}$ und $(\cos x \pm i \sin x)^n$ auch jeden andern imaginären Ausdruck auf die einfache Form $\alpha + \beta i$ zurückführen kann, wo aber auch α oder $\beta = 0$ sein kann*).

89 a.

Hat man zwei komplexe Gröfsen $a + bi$ und $a' + b'i$ zu addieren, so ist die Summe offenbar $= (a + a') + (b + b') \cdot i$. Diese Addition läfst sich auch graphisch bewirken. Stellt nämlich der Punkt m in der Zahlenebene die Gröfse $a + bi$ dar, so dafs also $os = a$ und $ms = b$ ist, und man trägt nun, vom Punkte m ausgehend, noch die Gröfse $a' + b'i$ auf, so dafs $mv = st = a'$ und $nv = b'$ ist, so stellt der Punkt n die Summe beider dar. Die Linie $om = r$ stellt den Modulus der ersten, $mn = r'$ den der zweiten komplexen Gröfse und $on = \varrho$ den Modulus ihrer Summe dar, nämlich



$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ r' = \sqrt{a'^2 + b'^2} \text{ und } \varrho = \sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2}.$$

Hierbei fällt auf, dafs der Modulus von der Summe zweier komplexen Gröfsen, $a + bi$ und $a' + b'i$, entweder unter oder doch höchstens nur gleich der Summe beider Moduli ist. In Zeichen:

$$\sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2} \leqq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}.$$

Bilden die beiden Moduli r, r' eine gerade Linie, dann wäre $\varrho = r + r'$.

*) Über die geometrische Konstruktion der imaginären Gröfsen siehe Anhang § 177.

Zusatz 1. Es folgt hieraus, dafs auch der Modulus von der Summe beliebig vieler komplexen Gröfsen entweder unter oder doch höchstens nur gleich der Summe aller Moduli ist, indem man von zwei auf drei, von drei auf vier komplexe Gröfsen schliefst &c.

Zusatz 2. Dafs sich auch die Subtraktion einer komplexen Gröfse von einer andern graphisch bewirken und dadurch auch die Ausführung dieser Operation sich versinnlichen läfst, ist für sich klar.

89 b.

Aufgabe. Den Ausdruck $(a+bi) . (c+di)$ auf die einfachere Form $\alpha+\beta i$ zu reduzieren.

Auflösung. Durch unmittelbare Multiplikation erhält man

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc) . i.$$

Bei dieser Reduktion fällt auf, dafs der Modulus des Produkts aus zwei (oder auch beliebig vielen) komplexen Faktoren gleich ist dem Produkt aus den Moduln der einzelnen Faktoren. Denn

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2) \text{*)}$$

mithin: $\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2+b^2} . \sqrt{c^2+d^2}$

90.

Aufgabe. Den Ausdruck $\frac{a+bi}{c+di}$ auf die Form $\alpha+\beta i$ zu reduzieren.

Auflösung. Man multipliziere Zähler und Nenner mit $c-di$ so erhält man

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2} . i.$$

Hierbei fällt auf, dafs der Modulus des Quotienten zweier imaginären Gröfsen gleich ist dem Quotienten aus ihren Moduln. Denn

$$\frac{(ac+bd)^2}{(c^2+d^2)^2}+\frac{(bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} \text{ \&c.}$$

---

*) Nebenbei bemerkt ist also das Produkt zweier Zahlen, wovon jede die Summe zweier Quadrate ist, immer gleich der Summe zweier Quadrate; z. B. $(1^2+2^2)(3^2+4^2)=(1.3-2.4)^2+(1.4+2.3)^2$, d. i. $5.25=5^2+10^2$.

91.

Aufgabe. Den Ausdruck $(x+yi)^n$ auf die Form $\alpha+\beta i$ zu reduzieren.

Auflösung. Man könnte hier den binomischen Lehrsatz anwenden, wenn, für den Fall, dafs n ein Bruch oder negativ wäre, die Reihen für die reelle Gröfse α und für den Faktor β konvergierten. Bequemer ist aber jedenfalls, hier die Moivresche Formel anzuwenden. Setzen wir nämlich nach § 83 $x\pm yi=\varrho\ (\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$, so ist:

$$(x\pm yi)^n=\varrho^n(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)^n=\varrho^n\cos n\varphi\pm\varrho^n\sin n\varphi\,.\,i$$

worin $\varrho=\sqrt{x^2+y^2}$ und $\left(\text{weil. } \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}\right)$: $\varphi=\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$, mithin auch, wenn man will, so geschrieben

$$(x\pm yi)^n=(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\cos\left(n\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)\pm(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\sin\left(n\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right).i.$$

92.

Aufgabe. Den Ausdruck $l(x+yi)$ zu reduzieren.

Auflösung. Es ist $(x+yi)=x\left(1+\frac{y}{x}i\right)$. Daher

$$l(x+yi)=lx+l\left(1+\frac{y}{x}i\right)$$

mithin (§ 76 [1])

$$l(x+yi)=lx+\frac{y}{x}i-\tfrac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2.i^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3.i^3-\tfrac{1}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^4.i^4+\tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^5.i^5-\ldots$$

$$l(x+yi)=lx+\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2-\tfrac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^4+\tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^6-\tfrac{1}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^8+-\ldots\right]$$
$$+i\left[\frac{y}{x}-\tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^5-\tfrac{1}{7}\left(\frac{y}{x}\right)^7+-\ldots\right]$$

$$l(x+yi)=lx+\tfrac{1}{2}l\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)+i\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\quad\left[\text{s. § 87, (1)}\right]$$

$$l(x+yi)=l\sqrt{x^2+y^2}+i\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\ ^{*)}.$$

---

*) $\tfrac{1}{2}l\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\tfrac{1}{2}l\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)=l\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x}=l\sqrt{x^2+y^2}-lx.$

93

Aufgabe. Den Ausdruck $e^{x \pm yi}$ zu reduzieren.

Auflösung. Es ist

$$e^{x \pm yi} = e^x \,.\, e^{\pm yi} = e^x \,.\, (\cos y \pm i \sin y) = e^x \cos y \pm e^x \sin y \,.\, i.$$

94.

Aufgabe. Die Ausdrücke $\sin(xi)$ und $\cos(xi)$ zu reduzieren.

Auflösung. Setzt man in den Formeln § 86 xi statt x, so hat man:

$$\sin(xi) = \frac{e^{-x} - e^x}{2i} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \,.\, i \text{ (hier ist } \alpha = 0)$$

$$\cos(xi) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots \text{ (hier ist } \beta = 0).$$

Aufgabe. In Cauchys Calcul différentiel findet sich auch die Aufgabe: Die Ausdrücke $\sin(y + xi)$ und $\cos(y + xi)$ zu reduzieren.

Auflösung. Es ist

$$\sin(y + xi) = \sin y \,.\, \cos(xi) + \cos y \,.\, \sin(xi)$$

$$\sin(y + xi) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \,.\, \sin y + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cos y \,.\, i \dots (1)$$

$$\cos(y + xi) = \cos y \,.\, \cos(xi) - \sin y \,.\, \sin(xi)$$

$$\cos(y + xi) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \,.\, \cos y - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sin y \,.\, i \dots (2)$$

95.

Vermittelst der Moivreschen Formel ist es nun leicht, die Potenzen von $\sin x$, $\cos x$ durch dieselben trigonometrischen Funktionen vom Vielfachen des Bogens oder Winkels x auszudrücken.

Setzen wir, der Kürze halber:

$$\cos x + i \sin x = u,$$

$$\cos x - i \sin x = v, \text{ so ist}$$

$$u + v = 2 \,.\, \cos x, \qquad uv = 1,$$

$$u - v = 2i \sin x, \qquad u^m v^m = 1,$$

und weil (§ 88)

$$(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx = u^m,$$
$$(\cos x - i \sin x)^m = \cos mx - i \sin mx = v^m,$$

so ist auch

$$u^m + v^m = 2 \cos mx,$$
$$u^m - v^m = 2i \sin mx.$$

Dies vorausgeschickt, hat man nun aus der Gleichung $2 \cos x = u + v$ oder $2^m \cos^m x = (u + v)^m$, wenn man das Binom entwickelt, indem hier der Exponent m eine ganze positive Zahl bedeutet

$$2^m \cos^m x = u^m + m u^{m-1}.v + \frac{m.m-1}{1.2} u^{m-2}.v^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} u^{m-3}.v^3 + \ldots\ldots + m u v^{m-1} + v^m$$

$$2^m \cos^m x = u^m + m.u^{m-2}.uv + \frac{m.m-1}{1.2}.u^{m-4}.u^2v^2 + \ldots + m.uv.v^{m-2} + v^m$$

uv = 1 $\quad$ $u^m v^m = 1$

$$2^m \cos^m x = (u^m + v^m) + m(u^{m-2} + v^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-4} + v^{m-4}) + \ldots$$

$$2^m \cos^m x = 2.\cos mx + m.2\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}.2\cos(m-4)x + \ldots$$

Da die Koeffizienten der Binomialreihe, die von Anfang und Ende gleich weit abstehen, gleich sind, und (wie nötigenfalls durch ein bestimmtes Beispiel klar wird)*) für eine gerade Anzahl Glieder (also m ungerade) jeder der beiden mittlern mit u

und v multiplizierten Koeffizienten $= \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots\left(\frac{m+1}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}$

und für eine ungerade Anzahl Glieder (also m gerade) das mittlere

Glied $= \dfrac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m}{2}}.u^{\frac{m}{2}}.v^{\frac{m}{2}} = 2.\frac{1}{2}.\dfrac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m}{2}}$

---

*) $2^5 \cos^5 x = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5.$

$2^5 \cos^5 x = (u^5 + v^5) + 5.(u^3 + v^3) + \frac{5.4}{1.2}(u + v)$

$2^5 \cos^5 x = 2.\cos 5x + 5.2\cos 3x + \frac{5.4}{1.2}.2\cos x.$

ist, so hat man

1) wenn m gerade

$$2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos(m-4)x + \ldots + \frac{1}{2}\cdot\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots\frac{m}{2}}$$

2) wenn m ungerade

$$2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + \frac{m}{1}.\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos(m-4)x + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+1}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}.\cos x$$

Die andere Gleichung $2i\sin x = u - v$, oder $2^m i^m \sin^m x = (u-v)^m$ giebt

$$2^m i^m \sin^m x = u^m - mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}u^{m-2}v^2 - + \ldots \pm v^m$$

$$2^m i^m \sin^m x = u^m - mu^{m-2} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}u^{m-4} - + \ldots \pm v^m.$$

Da die Vorzeichen regelmäſsig abwechseln, und das letzte Glied für ein gerades m positiv und für ein ungerades m negativ ist, so hat man $\left[\text{weil } i^m = (i^2)^{\frac{m}{2}} = (-1)^{\frac{m}{2}}\right]$

1) für m gerade

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\,2^{m-1}\sin^m x = \cos mx - \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos(m-4)x - \ldots \pm \frac{1}{2}.\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots\frac{m}{2}}$$

2) für m ungerade*)

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}.2^{m-1}.\sin^m x = \sin mx - \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\sin(m-4)x - \ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+1}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}.\sin x$$

---

*) Für ein ungerades m ist nämlich das letzte Glied negativ, und da dann allgemein $u^m - v^m = 2i\sin mx$; $u^{m-2} - v^{m-2} = 2\,.\,i\sin(m-2)x$ &c., so bleibt in jedem Gliede der Faktor i, und indem man auf beiden Seiten durch i dividiert, kommt auf der linken Seite der Faktor $i^{m-1} = (i^2)^{\frac{m-1}{2}} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$.

96.

Da vorstehende vier Formeln für die Integralrechnung wichtig sind, so wollen wir hier gleich einige spezielle Fälle zum vorkommenden Gebrauch und zum Nachschlagen daraus ableiten. Setzt man $m=2, 3, 4, \ldots$, so erhält man

$$
\begin{aligned}
2\cos^2 x &= \cos 2x + 1 \\
4\cos^3 x &= \cos 3x + 3\cos x \\
8\cos^4 x &= \cos 4x + 4\cos 2x + 3 \\
16\cos^5 x &= \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x \\
32\cos^6 x &= \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10 \\
64\cos^7 x &= \cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\sin^2 x &= -\cos 2x + 1 \\
4\sin^3 x &= -\sin 3x + 3\sin x \\
8\sin^4 x &= \cos 4x - 4\cos 2x + 3 \\
16\sin^5 x &= \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x \\
32\sin^6 x &= -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10 \\
64\sin^7 x &= -\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x. \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

97.

Vermittelst der beiden § 88 gefundenen Gleichungen, nämlich

$$\cos mx + i\sin mx = (\cos x + i\sin x)^m$$
$$\cos mx - i\sin mx = (\cos x - i\sin x)^m$$

erhält man auch leicht Formeln, nach welchen man umgekehrt die sinus und cosinus vom Vielfachen eines Bogens oder Winkels durch Potenzen dieser trigonometrischen Funktionen vom einfachen Bogen oder Winkel ausdrücken kann. Man hat nämlich zuerst

$$2\cos mx = (\cos x + i\sin x)^m + (\cos x - i\sin x)^m,$$
$$2i\sin mx = (\cos x + i\sin x)^m - (\cos x - i\sin x)^m.$$

Betrachten wir hier nur den Fall, wo m eine ganze Zahl ist, und entwickeln die rechten Seiten nach der Binomialformel,

indem man auf die sich tilgenden Glieder und gemeinschaftlichen Faktoren achtet, so verschwindet alles scheinbar Imaginäre und man erhält folgende beide endliche Reihen, deren einfaches Bildungsgesetz in die Augen springt:

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} \cos^{m-2} x \,.\, \sin^2 x$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \cos^{m-4} x \sin^4 x - + \ldots$$

$$\sin mx = \frac{m}{1} \cos^{m-1} x \,.\, \sin x - \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cos^{m-3} x \,.\, \sin^3 x$$
$$+ \frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} \cos^{m-5} x \,.\, \sin^5 x - + \ldots$$

Hiernach ist z. B. für $m = 2, 3, 4, \ldots$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \,.\, \sin^2 x$$
$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \,.\, \sin^2 x + \sin^4 x$$
$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$$
$$\cos 6x = \cos^6 x - 15 \cos^4 x \sin^2 x + 15 \cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x$$
$$\vdots$$

$$\sin 2x = 2 \cos x \,.\, \sin x$$
$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \,.\, \sin x - \sin^3 x$$
$$\sin 4x = 4 \cos^3 x \,.\, \sin x - 4 \,.\, \cos x \,.\, \sin^3 x.$$
$$\sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$$
$$\sin 6x = 5 \cos^5 x \sin x - 20 \cos^3 x \sin^3 x + 6 \cos x \sin^5 x$$
$$\vdots$$

Zusatz. Aus dem Anblick der allgemeinen Formeln ergiebt sich die Möglichkeit, dafs man, wenn m gerade, cos mx auch durch lauter Potenzen von sin x (oder cos x) und, wenn m ungerade, sin mx durch Potenzen von sin x ausdrücken könnte. Setzt man nämlich $1 - \sin^2 x$ statt $\cos^2 x$, so hat man z. B.:

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = -1 + 2 \cos^2 x$$
$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$
$$\cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x + 8 \sin^4 x = 1 - 8 \cos^2 x + 8 \cos^4 x$$
$$\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$$
$$\cos 6x = 1 - 18 \sin^2 x + 48 \sin^4 x - 32 \sin^6 x$$
$$\vdots$$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; $\sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x$.

Ferner erhält man

$$\sin 4x = \cos x\,(4\sin x - 8\sin^3 x);\quad \sin 4x = \sin x\,(8\cos^3 x - 4\cos x);$$
$$\sin 6x = \cos x\,(6\sin x - 32\sin^3 x + 32\sin^5 x)$$
$$\sin 6x = \sin x\,(32\cos^5 x - 32\cos^3 x + 6\cos x).$$

Hyperbolische Funktionen.

97a.

Setzt man den Relationen $\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots,$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$ (s. § 80) analog:

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{Sin}\,x = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \ldots, \\ \mathfrak{Cos}\,x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots, \end{cases}$$

so erhält man die sogenannten hyperbolischen Funktionen, die zur kürzeren Berechnung mancher Probleme der Analysis und höhern Mathematik dienen.

Durch Division ergeben sich aus diesen Funktionen die den trigonometrischen Funktionen $\mathrm{tg}\,x$ und $\cot x$ analogen Relationen:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{Tg}\,x = \frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cos}\,x} = \frac{x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5}}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4}} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdot \\ \mathfrak{Cot}\,x = \frac{\mathfrak{Cos}\,x}{\mathfrak{Sin}\,x} = \mathfrak{Tg}\,x = \frac{1}{x - \frac{x^3}{3}\ldots} = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \ldots \end{cases}$$

Nimmt man in (1) und (2) x negativ, so ergiebt sich unmittelbar:

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{Sin}\,(-x) = -\mathfrak{Sin}\,x; & \mathfrak{Cos}\,(-x) = \mathfrak{Cos}\,(+x); \\ \mathfrak{Tg}\,(-x) = -\mathfrak{Tg}\,x; & \mathfrak{Cot}\,(-x) = -\mathfrak{Cot}\,x. \end{cases}$$

In $x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots = \sin x$

und $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} \ldots = \cos x$ statt $x : ix$ gesetzt, giebt:

$$(4)\quad \mathfrak{Cos}\,x = \cos ix;\quad \mathfrak{Sin}\,x = \frac{\sin ix}{i} = -i\sin ix.$$

Die Reihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$ (s. § 73,,7) giebt mit negativem x: $\quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$

Aus beiden Relationen folgt: $\quad$ (5) $\quad \mathrm{Cos}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

und $\quad$ (6) $\quad \mathrm{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(5) und (6) addiert und subtrahiert, giebt:

(7) $\quad e^x = \mathrm{Cos}\, x + \mathrm{Sin}\, x$; $\quad$ (8) $\quad e^{-x} = \mathrm{Cos}\, x - \mathrm{Sin}\, x$.

Durch Multiplikation von (7) und (8):

$\mathrm{Cos}^2 x - \mathrm{Sin}^2 x = e^x . e^{-x} = e^0$ oder

(8) $\begin{cases} \mathrm{Cos}^2 x - \mathrm{Sin}^2 x = 1 \text{ und daher auch:} \\ 1 + \mathrm{Sin}^2 x = \mathrm{Cos}^2 x; \qquad \mathrm{Cos}^2 x - 1 = \mathrm{Sin}^2 x. \end{cases}$

Aus diesen Relationen folgt:

(9) $\begin{cases} 1 - \mathrm{Tg}^2 x = 1 - \frac{\mathrm{Sin}^2 x}{\mathrm{Cos}^2 x} = \frac{\mathrm{Cos}^2 x - \mathrm{Sin}^2 x}{\mathrm{Cos}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 x}, \\ 1 - \mathrm{Cot}^2 x = 1 - \frac{\mathrm{Cos}^2 x}{\mathrm{Sin}^2 x} = -\frac{\mathrm{Cos}^2 x - \mathrm{Sin}^2 x}{\mathrm{Sin}^2 x} = -\frac{1}{\mathrm{Sin}^2 x}; \end{cases}$

folglich auch: $\quad$ (10) $\quad \mathrm{Cos}\, x = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{Tg}^2 x}}, \mathrm{Sin}\, x = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Cot}^2 x - 1}}$.

$\mathrm{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ mit $\mathrm{Cos}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ multipliziert, giebt:

(11) $\quad \mathrm{Sin}\, x\, \mathrm{Cos}\, y = \frac{e^x e^y - e^{-x} e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^{-y}}{4}$;

hierin x mit y vertauscht:

(12) $\quad \mathrm{Cos}\, x\, \mathrm{Sin}\, y = \frac{e^y e^x - e^{-y} e^x + e^y e^{-x} - e^{-y} e^{-x}}{4}$.

Durch Addition von (11) und (12):

$\mathrm{Sin}\, x\, \mathrm{Cos}\, y + \mathrm{Cos}\, x\, \mathrm{Sin}\, y = \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$.

Dies mit (6) verglichen, ergiebt sich:

(13) $\quad \mathrm{Sin}\,(x + y) = \mathrm{Sin}\, x\, \mathrm{Cos}\, y + \mathrm{Cos}\, x\, \mathrm{Sin}\, y$.

y hier negativ genommen, giebt mit (3):

(14) $\quad \mathrm{Sin}\,(x - y) = \mathrm{Sin}\, x\, \mathrm{Cos}\, y - \mathrm{Cos}\, x\, \mathrm{Sin}\, y$.

In gleicher Weise aus (5) und (6):

$$\mathfrak{Cos}\, x\, \mathfrak{Cos}\, y = \frac{e^x e^y + e^{-x} e^y + e^x e^{-y} + e^{-x} e^{-y}}{4},$$

$$\mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Sin}\, y = \frac{e^x e^y - e^{-x} e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^{-y}}{4}.$$

Mit (5) folgt durch Addition dieser beiden Gleichungen:

(15) $\mathfrak{Cos}\,(x+y) = \mathfrak{Cos}\, x\, \mathfrak{Cos}\, y + \mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Sin}\, y$; y negativ, giebt (16) $\mathfrak{Cos}\,(x-y) = \mathfrak{Cos}\, x\, \mathfrak{Cos}\, y - \mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Sin}\, y$.

(13) durch (15) dividiert und der Quotient durch $\mathfrak{Cos}\, x\, \mathfrak{Cos}\, y$ gekürzt: (17) $\mathfrak{Tg}\,(x+y) = \dfrac{\mathfrak{Tg}\, x + \mathfrak{Tg}\, y}{1 + \mathfrak{Tg}\, x\, \mathfrak{Tg}\, y}$.

Mit negativem y: (18) $\mathfrak{Tg}\,(x-y) = \dfrac{\mathfrak{Tg}\, x - \mathfrak{Tg}\, y}{1 - \mathfrak{Tg}\, x\, \mathfrak{Tg}\, y}$.

Aus (15) dividiert durch (13): (19) $\mathfrak{Cot}\,(x+y) = \dfrac{1 + \mathfrak{Cot}\, x\, \mathfrak{Cot}\, y}{\mathfrak{Cot}\, x + \mathfrak{Cot}\, y}$,

und mit negativem y: (20) $\mathfrak{Cot}\,(x-y) = \dfrac{1 - \mathfrak{Cot}\, x\, \mathfrak{Cot}\, y}{\mathfrak{Cot}\, x - \mathfrak{Cot}\, y}$.

In (13), (15), (17), (19) $y = x$ gesetzt, giebt:

$$(21) \begin{cases} \mathfrak{Sin}\, 2x = 2\, \mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Cos}\, x; \quad \mathfrak{Cos}\, 2x = \mathfrak{Cos}^2 x + \mathfrak{Sin}^2 x; \\ \mathfrak{Tg}\, 2x = \dfrac{2\, \mathfrak{Tg}\, x}{1 + \mathfrak{Tg}^2 x}; \; \mathfrak{Cot}\, 2x = \dfrac{1 + \mathfrak{Cot}^2 x}{2\, \mathfrak{Cot}\, x} = \dfrac{1}{2}(\mathfrak{Tg}\, x + \mathfrak{Cot}\, x). \end{cases}$$

Damit erhält man:

$$(22) \begin{cases} 1 + \mathfrak{Tg}^2 x = \dfrac{\mathfrak{Cos}^2 x + \mathfrak{Sin}^2 x}{\mathfrak{Cos}^2 x} = \dfrac{\mathfrak{Cos}\, 2x}{\mathfrak{Cos}^2 x}; \\ 1 + \mathfrak{Cot}^2 x = \dfrac{\mathfrak{Sin}^2 x + \mathfrak{Cos}^2 x}{\mathfrak{Sin}^2 x} = \dfrac{\mathfrak{Cos}\, 2x}{\mathfrak{Sin}^2 x}. \end{cases}$$

$\dfrac{x}{2}$ statt x giebt aus (21): $\mathfrak{Cos}\, x = \mathfrak{Cos}^2 \dfrac{x}{2} + \mathfrak{Sin}^2 \dfrac{x}{2}$,

folglich $\mathfrak{Cos}\, x + 1 = 1 + \mathfrak{Sin}^2 \dfrac{x}{2} + \mathfrak{Cos}^2 \dfrac{x}{2} = \mathfrak{Cos}^2 \dfrac{x}{2} + \mathfrak{Cos}^2 \dfrac{x}{2}$,

oder: (23) $\mathfrak{Cos}\, x + 1 = 2\, \mathfrak{Cos}^2 \dfrac{x}{2}$.

Eben so: $\mathfrak{Cos}\, x - 1 = \mathfrak{Sin}^2 \dfrac{x}{2} + \mathfrak{Cos}^2 \dfrac{x}{2} - 1 = \mathfrak{Sin}^2 \dfrac{x}{2} + \mathfrak{Sin}^2 \dfrac{x}{2}$,

oder: (24) $\mathfrak{Cos}\, x - 1 = 2\, \mathfrak{Sin}^2 \dfrac{x}{2}$.

Aus (23) und (24) folgt:

$$(25)\qquad \mathfrak{Cos}\,\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}\,x+1}{2}}\,,\quad \mathfrak{Sin}\,\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}\,x-1}{2}}\,.$$

Hieraus durch Division: $$(26)\qquad \mathfrak{Tg}\,\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}\,x-1}{\mathfrak{Cos}\,x+1}}\,.$$

Ferner: $\mathfrak{Sin}\,3x=\mathfrak{Sin}\,(2x+x)=\mathfrak{Sin}\,2x\,\mathfrak{Cos}\,x+\mathfrak{Cos}\,2x\,\mathfrak{Sin}\,x$
$=2\,\mathfrak{Sin}\,x\,\mathfrak{Cos}\,x\,.\,\mathfrak{Cos}\,x+(\mathfrak{Cos}\,^2x+\mathfrak{Sin}\,^2x)\,\mathfrak{Sin}\,x$
$=3\,\mathfrak{Sin}\,x\,\mathfrak{Cos}\,^2x+\mathfrak{Sin}\,^3x=3\,\mathfrak{Sin}\,x\,(1+\mathfrak{Sin}\,^2x)+\mathfrak{Sin}\,^3x$

oder: $$(27)\qquad \mathfrak{Sin}\,3x=3\,\mathfrak{Sin}\,x+4\,\mathfrak{Sin}\,^3x\,.$$

Eben so: $\mathfrak{Cos}\,3x=\mathfrak{Cos}\,(2x+x)=\mathfrak{Cos}\,2x\,\mathfrak{Cos}\,x+\mathfrak{Sin}\,2x\,\mathfrak{Sin}\,x$
$=(\mathfrak{Cos}\,^2x+\mathfrak{Sin}\,^2x)\,\mathfrak{Cos}\,x+2\,\mathfrak{Sin}\,x\,\mathfrak{Cos}\,x\,.\,\mathfrak{Sin}\,x$
$=\mathfrak{Cos}\,^3x+3\,\mathfrak{Cos}\,x\,\mathfrak{Sin}\,^2x=\mathfrak{Cos}\,^3x+3\,\mathfrak{Cos}\,x\,(\mathfrak{Cos}\,^2x-1)$

oder: $$(28)\qquad \mathfrak{Cos}\,3x=4\,\mathfrak{Cos}\,^3x-3\,\mathfrak{Cos}\,x\,.$$

Aus $\mathfrak{Sin}\,(x+u)=\mathfrak{Sin}\,x\,\mathfrak{Cos}\,u+\mathfrak{Cos}\,x\,\mathfrak{Sin}\,u$ ergiebt sich

$\mathfrak{Sin}(x+u)=\mathfrak{Sin}\,x\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{2.3.4}\ldots\right)+\mathfrak{Cos}\,x\left(u+\frac{u^3}{2.3}+\ldots\right)$ oder:

$$(29)\qquad \mathfrak{Sin}\,(x+u)=\mathfrak{Sin}\,x+u\,\mathfrak{Cos}\,x+\frac{u^2}{2}\,\mathfrak{Sin}\,x+\frac{u^3}{2.3}\,\mathfrak{Cos}\,x+\ldots.^{*)}$$

Die trigonometrischen Logarithmen geben bekanntlich zu einem Winkel (Bogen) als Argument die Logarithmen der Funktionen $\sin x$ u. s. w. Für die hyperbolischen Funktionen existieren gleichfalls Tafeln, die zu dem Argument ψ die Funktionen $lg\,\mathfrak{Sin}\,\psi$, $lg\,\mathfrak{Cos}\,\psi$, $lg\,\mathfrak{Tg}\,\psi$ enthalten. Wir geben nebenstehendes Bruchstück aus denselben:

ψ	$lg\,\mathfrak{Sin}\,\psi$	$lg\,\mathfrak{Cos}\,\psi$	$lg\,\mathfrak{Tg}\,\psi$
0,00	$-\infty$	0,00000	$-\infty$
0,01	8,00001	0,00002	7,99998
0,02	8,30106	0,00009	8,30097
0,99	0,06439	0,18509	9,87930
1,00	0,07011	0,18839	9,88172
1,01	0,07580	0,19171	9,88409
1,09	0,12025	0,21886	9,90139
1,10	0,12569	0,22233	9,90336
1,11	0,13111	0,22582	9,90529
2,00	0,55953	0,57544	9,98409
3,30	1,13155	1,13273	9,99882
3,31	1,13591	1,13706	9,99884
6,00	2,30473	2,30474	9,99999

Um zu einem gegebenen ψ die 3 Funktionen einer solchen Tafel zu berechnen, kann man in folgender Weise verfahren. Man bestimme φ aus $lg\,\text{vulg}\,\text{tg}\,\varphi=0{,}434294482\,\psi$; dann ist

*) Für die Differentialrechnung folgt hieraus unmittelbar:
$d\,.\,\mathfrak{Sin}\,x=\mathfrak{Cos}\,x\,.\,dx.$

$\mathfrak{Cof}\,\psi = \frac{1}{\sin 2\varphi}$, $\mathfrak{Sin}\,\psi = \operatorname{tg}(2\varphi - 90^0)$, $\mathfrak{Tg}\,\psi = \frac{\mathfrak{Sin}\,\psi}{\mathfrak{Cof}\,\psi}$.

Beweis: $\mathfrak{Cof}\,\psi = \frac{1}{\cos\alpha}$ gesetzt, erhält man $\mathfrak{Sin}\,\psi = \sqrt{\mathfrak{Cof}^2\psi - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \operatorname{tg}\alpha$. Nun ist $e^\psi = \mathfrak{Cof}\,\psi + \mathfrak{Sin}\,\psi$ [s. oben (7)] $= \frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$, folglich $\psi = lg$ nat tg $\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$, oder lg vulg tg $\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = 0{,}43429\,\psi$. Setzt man noch $45^0 + \frac{\alpha}{2} = \varphi$, so ist lg vulg tg $\varphi = 0{,}43429\,\psi$ und $\alpha = 2\varphi - 90^0$, woraus sich obige Ausdrücke ergeben.

Ist z. B. $\psi = 1{,}10$ gegeben (s. vorstehende Tafel), so ist lg tg $\varphi = 0{,}43429 \cdot 1{,}1 = 0{,}4777239$; $\varphi = 71^0\,35'\,20''$; $\mathfrak{Cof}\,\psi = \frac{1}{\sin 2\varphi} = \frac{1}{\cos 53^0\,10'\,40''}$, daher $lg\,\mathfrak{Cof}\,\psi = 0{,}2223310$, $\mathfrak{Sin}\,\psi =$ tg $53^0\,10'\,40''$, $lg\,\mathfrak{Sin}\,\psi = 0{,}1256918$; $lg\,\mathfrak{Tg}\,\psi = lg\,\mathfrak{Sin}\,\psi - lg\,\mathfrak{Cof}\,\psi$.

Den Nutzen der hyperbolischen Funktionen mag die nachstehende Aufgabe zeigen:

$x^3 - ax - b = 0$ aufzulösen, wenn $-a$ negativ und $4a^3 < 27b^2$.

Auflösung: Setze $x = ny$, folglich ist $y^3 - \frac{ay}{n^2} - \frac{b}{n^3} = 0$;

$y = \mathfrak{Cof}\,z$ giebt: $\quad \mathfrak{Cof}^3 z - \frac{a}{n^2}\mathfrak{Cof}\,z - \frac{b}{n^3} = 0.$

Damit $\mathfrak{Cof}^3 z - \frac{3}{4}\mathfrak{Cof}\,z - \frac{\mathfrak{Cof}\,3z}{4} = 0$ [s. oben (28)] verglichen,

ergiebt sich: $\quad n = \sqrt{\frac{4a}{3}}$ und $\mathfrak{Cof}\,3z = \frac{3b}{a\sqrt{\frac{4a}{3}}}$.

Hat man aus der letzten Gleichung mittelst der hyperbolischen Tafeln z gefunden, so ist $x = ny = \sqrt{\frac{4a}{3}} \cdot \mathfrak{Cof}\,z$.

Hier sind also nur 2 Formeln nötig, während die trigonometrischen Funktionen deren 3 benutzen müssen.

Achtes Buch.

Von den algebraischen Gleichungen.

1. Hilfssätze.

98.

Hat man irgend eine ganze Funktion von x, z. B.:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N,$$

wo also die Exponenten n, $n-1, \ldots$ ganze positive Zahlen, die Koeffizienten A, B, C... bis M aber ganz beliebige positive, negative, ganze oder gebrochene Zahlen, 0 nicht ausgenommen, sind, N aber nicht 0 und von x befreit (N also das sogenannte absolute Glied der Gleichung) ist, so ist klar, dafs für jeden endlichen positiven oder negativen reellen Wert von x auch der Betrag der ganzen Funktion einen endlichen reellen Wert giebt, weil nämlich jedes Glied, also auch die Summe aller, einen reellen Wert giebt. Denkt man sich ferner einen für x angenommenen reellen Wert (x_0) durch ein proportioniertes Stück auf einer Abscissenlinie abgesteckt und den zugehörigen Betrag der ganzen Funktion durch eine entsprechende Ordinate dargestellt, so ist auch klar, dafs, wenn die Werte von x, die Abscissen, stetig aufeinander folgen, auch die entsprechenden Beträge der Funktion, die Ordinaten, also auch ihre Endpunkte stetig aufeinander folgen und eine einzige stetige Linie bilden. Wegen dieser Eigenschaft ist also eine ganze Funktion von x notwendig immer eine stetige (kontinuierliche).

99.

Die erwähnte Linie, welche aus einer solchen Funktion hervorgehen würde, kann den Umständen nach ganz oberhalb oder ganz unterhalb der Abscissenlinie oder auch zu beiden Seiten liegen, mithin dieselbe ein- oder auch mehreremal schneiden.

Die aus x^2-2x+5 entspringende Linie z. B. bleibt in ihrer unendlichen Ausdehnung nach rechts und links stets oberhalb der Abscissenlinie, weil es keinen reellen Wert von x giebt, für welchen die Funktion x^2-2x+5 gleich Null wird, denn setzen wir $x^2-2x+5=0$, so folgt daraus $x=1\pm2\sqrt{-1}$; diese komplexen Werte von x lassen sich aber nicht durch eine Abscisse darstellen, obgleich der Betrag der Funktion für diese komplexen Werte $=0$ wird. Die aus der Funktion x^2-x-6 entspringende Linie hingegen schneidet die Abscissenlinie zweimal und liegt also zu beiden Seiten derselben. Denn setzen wir $x^2-x-6=0$, so folgt daraus: $x=\frac{1\pm5}{2}$ &c.

100.

Aus dem vorstehenden Paragraphen folgt nun, daſs, wenn eine ganze Funktion

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N$$

für zwei reelle Werte von x (x_0 und x_1) Resultate von entgegengesetzten Vorzeichen giebt, d. h. eine positive und eine negative Ordinate, es dann notwendig auch (wenigstens) einen reellen Wert von x geben muſs, für welchen die Funktion $=0$ wird. Denn die stetige Linie, welche die Funktion, wirklich konstruiert, giebt, und welche durch die Endpunkte der positiven und negativen Ordinaten gehen würde, liegt teils oberhalb, teils unterhalb der Abscissenlinie und muſs dieselbe also wenigstens einmal schneiden.

101.

Lehrsatz. In jeder ganzen Funktion

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N$$

kann man statt x immer einen so groſsen Wert setzen, daſs

das höchste Glied (x^n) gröfser wird, als die Summe aller folgenden.

1. Beweis. Diese Funktion läfst sich so schreiben:

$$x^n\left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\ldots+\frac{M}{x^{n-1}}+\frac{N}{x^n}\right).$$

Nun kann man aber x so grofs werden lassen, dafs die auf 1 folgenden Brüche: $\frac{A}{x}, \frac{B}{x^2}, \ldots \frac{N}{x^n}$ so klein werden, dafs ihre Summe kleiner als 1 wird; alsdann ist aber offenbar auch

$$x^n > Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N.$$

2. Beweis. Legt man in $x^n+Ax^{n-1}+\ldots+Mx+N$ allen Koeffizienten A, B,...N den Wert des gröfsten, den wir mit G bezeichnen wollen, bei, so kann man für x einen solchen Wert angeben, dafs, selbst alle Vorzeichen als gleich angenommen, doch noch

$$x^n > G(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1) \text{ oder: (Algebra § 254)}$$

$$x^n > G.\frac{x^n-1}{x-1} \text{ oder}$$

$$x^n > \frac{G.x^n}{x-1}-\frac{G}{x-1} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

und dies offenbar um so mehr, wenn

$$x^n > G.\frac{x^n}{x-1} \text{ oder}$$

$$x-1 > G, \text{ also: } x > G+1.$$

Setzt man diesen Wert von x in (1), so wird die linke Seite gröfser als die rechte.

102.

Lehrsatz. In jeder ganzen Funktion von der Form

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}-Dx^{n-4}-Ex^{n-5}-\ldots-Mx-N,$$

in welcher nämlich ein oder mehrere unmittelbar aufeinander folgende Anfangsglieder alle positiv, die darauf folgenden aber alle negativ sind, giebt es unter den unzähligen positiven Werten, welche für x gesetzt werden können, nur einen einzigen, für welchen die Funktion $=0$ wird.

Beweis. Für $x = 0$ giebt die Funktion ein negatives Resultat ($-N$). Lassen wir nun x von 0 an im positiven Sinne immerfort wachsen, so wird zuletzt x^n allein schon gröſser, als die Summe aller folgenden (§ 101), mithin muſs x vorher schon einen solchen positiven Wert gehabt haben, für welchen die Funktion $= 0$ wurde (§ 100). Von da an aber bleibt bei wachsendem positiven x die Funktion immer positiv. Es giebt also nur einen positiven Wert von x, für welchen obige Funktion $= 0$ wird.

103.

Lehrsatz. Wenn es in der ganzen Funktion

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N$$

für die unbestimmte Gröſse x irgend einen Wert a giebt (er möge direkt, reciprok, lateral oder komplex sein), welcher die Funktion zu Null macht, so ist die Funktion notwendig durch $x - a$ ohne Rest teilbar.

Nehmen wir des leichtern Verständnisses halber erst einen speziellen Fall.

Die Funktion $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$ z. B. wird $= 0$, wenn man $+3$ statt x setzt; daſs sie nun wirklich durch $x - 3$ ohne Rest teilbar ist, zeigt zuerst die wirklich ausgeführte Partialdivision, indem (Algebra § 321)

$$\frac{x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24}{x - 3} = x^3 - x^2 - 10x - 8.$$

Die Funktion $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 26$ wird für $x = 3$ nicht $= 0$ und deshalb muſs auch bei der Division derselben durch $x - 3$ ein Rest bleiben. Es ist nämlich

$$\frac{x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 26}{x - 3} = x^3 - x^2 - 10x - 8 + \frac{2}{x - 3}.$$

1. Beweis. Sei allgemein

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N \ldots\ldots. (1)$$

eine beliebige ganze Funktion und a der Wert, welcher, statt x gesetzt, dieselbe zu Null macht, so daſs also

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + Ma + N = 0,$$

so wird offenbar, wenn man, wie in vorstehendem Zahlenbeispiel,

mit $x-a$ in $x^n+Ax^{n-1}+\ldots+Mx+N$ dividiert, der Quotient mit x^{n-1} anheben. Bezeichnen wir die Koeffizienten des Quotienten mit A_1, $B_1\ldots$, so hat man:

$$\frac{x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N}{x-a}=x^{n-1}+A_1x^{n-2}+B_1x^{n-3}+\ldots+M_1x+N_1+\frac{R}{x-a}$$

Dafs nun aber der hier fingierte und jedenfalls von x befreite Rest R nicht existiert oder $R=0$ ist, folgt, wenn man auf beiden Seiten mit $x-a$ multipliziert. Dann ist:

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N=(x-a)\left\{x^{n-1}+A_1x^{n-2}+\ldots+M_1x+N_1\right\}+R$$

Da nun beide Seiten dieser Gleichung für jeden Wert von x gleiche Resultate geben müssen, zufolge der Voraussetzung aber für $x=a$ die linke Seite $=0$, und rechter Hand der Faktor $x-a$, als auch das Produkt aus ihm und dem andern eingeklammerten Faktor $=0$ wird, so hat man, a statt x gesetzt:

$$0=0+R, \text{ mithin } R=0.$$

Dieser Beweis ist von d'Alembert, der folgende von Lagrange.

2. Beweis. Aus der Voraussetzung:

$$a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+\ldots+Ma+N=0$$

folgt: $N=-a^n-Aa^{n-1}-Ba^{n-2}-\ldots-Ma.$

Setzt man diesen Ausdruck für N in die Funktion (1), so wird sie

$$x^n+Ax^{n-1}+\ldots+Mx-a^n-Aa^{n-1}-\ldots-Ma$$

oder: $x^n-a^n+A(x^{n-1}-a^{n-1})+B(x^{n-2}-a^{n-2})+\ldots+M(x-a)$,

und es ist aus dieser Form nun klar, dafs die fragliche Funktion (1), was auch a sein möge, durch $x-a$ ohne Rest teilbar ist. (Algebra § 321, 2.)

104.

Bildet man durch gewöhnliche Multiplikation aus einfachen zweiteiligen Faktoren (Formen ersten Grades) ein Produkt, so ist klar, dafs das Produkt durch jeden der Faktoren ohne Rest teilbar sein mufs. Es ist z. B.

$$(x-1)(x-3)(x+2)=x^3-2x^2-5x+6 \ldots\ldots (1)$$

und das Produkt rechter Hand mufs durch $x-1$, durch $x-3$ und durch $x+2$ ohne Rest teilbar sein.

Weil ferner, wenn man in die Gleichung (1) für x beliebige Werte setzt, auf beiden Seiten gleiche Resultate kommen müssen, linker Hand aber jedesmal einer der Faktoren $=0$ wird, wenn man statt x die Zahlen 1, 3 und -2 setzt, so mufs für jeden dieser drei Werte von x auch das Produkt rechter Hand $=0$ werden, und es ist klar, dafs für jeden andern Wert von x keiner der drei Faktoren, also auch nicht das Produkt, $=0$ wird.

105.

Aus Formen ersten Grades, $x-a$, $x-b$, $x-c$ &c., läfst sich durch gemeine Multiplikation oder durch Variation das entsprechende Produkt entwickeln, und es ist einleuchtend, dafs, wenn man n einfache Faktoren, $x-a$, $x-b$ &c. hat, das Produkt eine ganze Funktion vom $n$ten Grade sein wird; wichtiger ist nun aber die umgekehrte Frage: ob man wohl jede ganze Funktion vom $n$ten Grade als ein aus Formen ersten Grades gebildetes Produkt betrachten darf und in solche zerlegen kann. Die Beantwortung dieser Frage hängt von der Theorie der höheren algebraischen Gleichungen ab.

106.

Schon in der Algebra (§ 218) ist erklärt, dafs in einer Gleichung mit nur einer unbekannten Gröfse jede statt der Unbekannten gesetzte positive, negative, laterale oder komplexe Gröfse, welche der Gleichung Genüge leistet (d. h. die linke Seite gleich der rechten macht), eine Wurzel derselben genannt wird. Kommen in einer Gleichung nur ganze positive Potenzen der unbekannten Gröfse vor und ist die endliche Zahl n der höchste Exponent, so heifst sie eine algebraische Gleichung vom $n$ten Grade (s. die Anmerkung zu § 34) und läfst sich, wenn man alle Glieder auf die linke Seite bringt, immer so formen:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + Mx + N = 0,$$

so dafs nämlich die linke Seite immer eine ganze Funktion ist.

Sind alle Potenzen der unbekannten Gröfse von der $n$ten bis zur 1ten darin enthalten, so heifst die Gleichung vollständig, sonst unvollständig.

107.

Die vorhin aufgeworfene Frage, ob sich jede ganze Funktion vom *n*ten Grade, oder, was dasselbe ist, die linke Seite einer geordneten algebraischen Gleichung *n*ten Grades von obiger Form immer in *n* einfache Faktoren auflösen läſst, kommt darauf zurück, ob es für jede algebraische Gleichung immer einen Wert *a* giebt, welcher, statt der unbestimmten Gröſse *x* gesetzt, derselben Genüge leistet; denn wäre dies der Fall, so könnte man, wie in § 103 bewiesen, die linke Seite $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Mx + N$ durch $x - a$ ohne Rest dividieren und mithin dieselbe in zwei Faktoren auflösen, wovon der eine einfach $(x - a)$ und der andere ein Quotient von der Form

$$x^{n-1} + A_1x^{n-2} + \ldots + M_1x + N_1$$

wäre. Von dem erhaltenen, um einen Grad niedrigeren Quotienten gälte dann dasselbe wieder. Denn wäre *b* die Gröſse, welche, statt *x* gesetzt, den Quotienten zu Null macht, so könnte man ihn wieder durch $x - b$ ohne Rest dividieren und mithin in das Produkt $(x - b)(x^{n-2} + A_2x^{n-3} + \ldots + M_2x + N_2)$ auflösen &c.

Lieſse sich also beweisen, daſs für jede (geordnete) algebraische Gleichung immer ein Wert existiert, welcher, statt der Unbekannten *x* gesetzt, derselbe Genüge leistet, so wäre man auch zu dem Schlusse berechtigt, jede Gleichung vom *n*ten Grade als ein Produkt aus *n* einfachen Faktoren und zwar als das Produkt der sämtlichen *n* annullierten Wurzelgleichungen betrachten zu dürfen.

Diese *n* einfachen Faktoren könnten dann, den Umständen nach, zum Teil oder auch alle reelle, imaginäre oder komplexe Gröſsen, zum Teil oder auch alle verschieden oder auch gleich sein; im letztern Falle sagt man, die Gleichung habe *n* gleiche Wurzeln.

So hat z. B. die Gleichung dritten Grades $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ drei reelle Wurzeln, zwei positive, 1 und 3, und eine negative, -2, denn sie ist das Produkt aus $(x - 1)(x - 3)(x + 2)$, und die drei Werte 1, 3, -2 leisten ihr Genüge.

Die Gleichung $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ hat drei reelle Wurzeln, worunter zwei gleiche. Sie ist das Produkt aus $(x - 2)(x - 2)(x + 1)$.

Die Gleichung: $x^2-2x+5=0$ hat zwei komplexe Wurzeln, sie ist das Produkt aus $(x-1+2\sqrt{-1})\,(x-1-2\sqrt{-1})$.

108.

* Dafs nun aber jede algebraische Gleichung $n$ten Grades wirklich eine und folglich n Wurzeln habe (sich in n Faktoren ersten Grades zerlegen läfst), dafür giebt es verschiedene Beweise, von welchen wir hier den einfachsten Ullherrschen (im Crelleschen Journal) erläutern wollen. Dieser Beweis zeigt nämlich, dafs es für jede ganze, in Bezug auf x rationale Funktion

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N \ldots\ldots (1)$$

immer einen Wert $p+qi$ giebt, welcher statt x gesetzt die Funktion (1) annulliert*).

Was auch p und q für Werte haben mögen (Null nicht ausgenommen), so können wir doch, zufolge § 83, immer $p=\varrho.\cos\varphi$ und $q=\varrho.\sin\varphi$, mithin $p+qi=\varrho\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ setzen.

Substituieren wir nun diesen bequemern Ausdruck statt x in (1), so verwandelt sich die Funktion in:

$$\varrho^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n+\left\{\begin{matrix} A\varrho^{n-1}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{n-1}+\\ B\varrho^{n-2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{n-2}+\\ \vdots\\ +M\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\end{matrix}\right\}+N$$

mithin auch, zufolge der Moivreschen Formel (§ 88), in

$$\varrho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)+\left\{\begin{matrix} A\varrho^{n-1}[\cos(n-1)\varphi+i\sin(n-1)\varphi+]\\ B\varrho^{n-2}[\cos(n-2)\varphi+i\sin(n-2)\varphi+]\\ \vdots\\ +M\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\end{matrix}\right\}+N \ldots. (2)$$

Um nun anschaulich zu machen, dafs es für ϱ und φ Werte geben mufs, welche den Ausdruck (2) annullieren, wollen wir denselben, wie in § 82 gezeigt, bildlich darstellen, indem wir ϱ und φ als veränderlich annehmen. Aus der unbegrenzten

*) Wir nehmen hier die Koeffizienten A, B, ... N alle als reelle Gröfsen an, weil dies vermöge § 112, Beweis 2, genügt. Vermöge §§ 113 und 114 brauchte dieser Beweis nur für den speziellen Fall geführt zu werden, wo n eine gerade Zahl und N positiv ist.

Zahlenebene, in welcher wir die fraglichen Werte von x, nämlich $p+qi$ oder ϱ (cos $\varphi + i$ sin φ) zu suchen haben, können wir nun ein endliches begrenztes Stück ausscheiden, über welches hinaus sich ϱ^n jedenfalls nicht erstrecken kann, indem wir nämlich für ϱ^n zuerst einen so grofsen Wert annehmen, dafs

$$\varrho^n > A\varrho^{n-1} + B\varrho^{n-2} + \ldots + M\varrho + N \ldots\ldots (3)$$

was nach § 101 immer möglich ist.

Beschreiben wir nun mit $\varrho^n = OA$ einen Kreis um den Nullpunkt O, so mufs die erste komplexe Gröfse in (2), nämlich: $\varrho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, für sich allein dargestellt, für jeden Wert von φ, Punkte der Zahlenebene geben, welche alle auf die Peripherie dieses Kreises fallen, weil ja der Modulus dieser komplexen Gröfse für jedes φ immer $\pm \varrho^n$ ist, nämlich $\sqrt{(\varrho^{2n}\cos^2 n\varphi + \varrho^{2n}\sin^2 n\varphi)} = \varrho^n$ (§ 85, Anmerkung).

Denken wir uns für φ alle stetig aufeinander folgenden Werte von 0^0 bis $\frac{360^0}{n}$ gesetzt, so ist zuerst für $\varphi = 0$, der Betrag der ersten komplexen Gröfse in (2), $= \varrho^n$ (Punkt A). Bezeichnen wir die Summe aller folgenden Glieder mit $\alpha + \beta i$, indem wir der Kürze halber:

$$A\varrho^{n-1}.\cos(n-1)\varphi + B\varrho^{n-2}.\cos(n-2)\varphi + \ldots + M\varrho\cos\varphi + N = \alpha..(4)$$

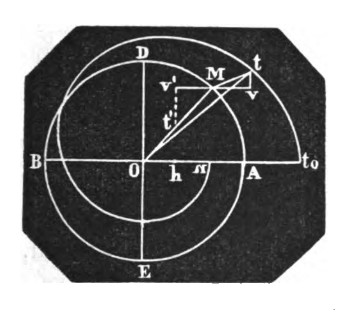
$$A\varrho^{n-1}.\sin(n-1)\varphi + B\varrho^{n-2}.\sin(n-2)\varphi + \ldots + M\varrho\sin\varphi = \beta\ldots\ldots(5)$$

setzen, so ist für $\varphi = 0$, der ganze Betrag der Funktion (2), $= \varrho^n + \alpha$ (indem nach (5) für $\varphi = 0$ auch $\beta = 0$). Weil nun $\varrho^n > \alpha$ *), so ist auch, selbst wenn α negativ wäre, $\varrho^n + \alpha > 0$. Der Punkt t_0 der Zahlenebene, welcher, für $\varphi = 0$, den ganzen Betrag der Funktion (2) darstellt, fällt notwendig r e c h t s von DE und zwar zwischen O und A, wenn α negativ, und über A hinaus, wenn, wie in der Figur angenommen, $\alpha (= At_0)$ positiv ist.

Für $\varphi = \frac{90^0}{n}$, also $n\varphi = 90^0 = \angle DOA$, ist in (2) der Betrag des ersten komplexen Gliedes $= \varrho^n . i$ (Punkt D) und, indem wir die Summe aller folgenden Glieder für diesen Wert von φ

*) Wenn man Glieder rechter Hand in der Ungleichung (3) mit den cosinus oder sinus beliebiger Winkel multipliziert, so mufs die Ungleichung bestehen bleiben, weil ja alle cosinus und sinus echte Brüche oder höchstens $=1$ sind.

wieder mit $\alpha+\beta i$ bezeichnen und, wie in § 89a gezeigt, dem ersten Gliede hinzufügen, ist der ganze Betrag der Funktion (2) $=\alpha+(\varrho^n+\beta)\,i$, mithin, wenn β auch negativ wäre, doch $\varrho^n+\beta>0$ und der fragliche Punkt der Zahlenebene fällt notwendig oberhalb des Durchmessers AB (und, je nachdem α positiv oder negativ ist, rechts oder links von DE).



Für $\varphi=\frac{180^0}{n}$, also $n\varphi=180^0$, ist der Betrag des ersten komplexen Gliedes $=\varrho^n\cos 180^0=-\varrho^n$ (Punkt B) und, indem wir die Summe der folgenden Glieder wieder mit $\alpha+\beta i$ bezeichnen, der ganze Betrag der Funktion (2) $=(-\varrho^n+\alpha)+\beta i$. Der ihn darstellende Punkt der Zahlenebene fällt nun links von DE, weil die reelle Gröfse $(-\varrho^n+\alpha)$, wegen $\varrho^n>\alpha$, jedenfalls negativ ist.

Für $\varphi=\frac{270^0}{n}$, also $n\varphi=270^0$ ist $i\,\varrho^n\sin 270^0=-\varrho^n.i$. Der fragliche Punkt fällt unterhalb AB, weil jetzt der Faktor von i, nämlich: $-\varrho^n+\beta$ (wegen $\varrho^n>\beta$), negativ ist.

Für $\varphi=\frac{360^0}{n}$, also $n\varphi=360^0$ ist der ganze Betrag der Funktion (2) $=(\varrho^n+\alpha)+\beta i$. Der fragliche Punkt fällt jetzt wieder rechts von DE (und, je nachdem β positiv oder negativ ist, oberhalb oder unterhalb AB).

Es ist nun einleuchtend, dafs für die Annahme eines so grofsen Wertes von ϱ, für welchen die Ungleichung (3) besteht, für keinen Wert von φ der fragliche Punkt t mit dem Nullpunkt 0 zusammenfallen kann, weil der Modulus des ersten komplexen Gliedes stets gröfser ist, als der Modulus von der Summe aller folgenden Glieder ($\varrho^n>\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, § 89a, Zusatz). *)

Die in (4) und (5) durch α und β vertretenen Ausdrücke

*) Wenn auch für irgend einen Punkt M, welcher den Betrag des ersten komplexen Gliedes in (2) darstellt, α und β, statt positiv, wie hier in der Figur angenommen, ($Mv=\alpha$, $vt=\beta$) beide negativ (Mv', $v't'$) und so beschaffen wären, dafs der Modulus $t'M=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ gerade auf den Modulus $OM=\varrho^n$ fiele, so würde der Punkt t' doch den Nullpunkt 0 nicht erreichen, weil $\varrho>\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

ändern sich stetig mit dem Winkel φ, so dafs, wenn φ sich um eine sehr kleine Gröfse ändert, sich notwendig α und β auch nur um sehr kleine Gröfsen ändern. Deshalb müssen die erwähnten Punkte t_0, $t_1, \ldots$ stetig aufeinander folgen und in einer gewissen krummen Linie den Nullpunkt umschlingen.*)

Lassen wir nun ϱ stetig bis zu Null abnehmen, und denken uns für jeden Modulus von $\varrho^n = OA$ bis $\varrho^n = 0$ die Konstruktion des ganzen Ausdrucks (2) ausgeführt, so wird offenbar die ganze Kreisfläche ADBE mit konzentrischen, sich stetig aneinander legenden Peripherieen ganz ausgefüllt. Gleichzeitig müssen auch die diesen unzähligen Peripherieen entsprechenden Windungen sich stetig aneinander legen. Und diese Windungen, die anfangs den Nullpunkt O umschlangen, müssen für sehr kleine ϱ ganz aufserhalb desselben liegen. Denn setzt man $\varrho = 0$, so reduziert sich der ganze Ausdruck (2) auf das letzte konstante Glied N, und dies giebt, konstruiert, einen Punkt h, der aufserhalb des Nullpunkts O auf AB fällt, und zwar rechts oder links von DE, je nachdem N positiv oder negativ ist.

Nun kann man sich aber ϱ, also auch den Modulus ϱ^n, so klein denken, dafs in (2) die konstante Gröfse N gröfser bleibt, als die Summe aller vorhergehenden reellen Glieder. Die diesem ϱ^n entsprechende kleine Windung (indem man für φ wieder alle Werte von 0 bis $\frac{360^0}{n}$ gesetzt denkt) wird jetzt nicht den Nullpunkt O, sondern den für $\varrho = 0$ entsprechenden Punkt h umschlingen. Es mufs also notwendig zwischen $\varrho^n = OA$ und $\varrho^n = 0$ ein solcher Modulus ϱ^n existieren, für welchen die Windung den Nullpunkt weder umschlingt, noch

*) Wollte man φ noch weiter wachsen lassen, z. B. von $\frac{360^0}{n}$ bis $\frac{2.360^0}{n}$, also $n\varphi$ von 360^0 bis 2.360^0, so erhält man noch eine Windung, und für $\varphi = 0$ bis $\varphi = 360^0$, also von $n\varphi = 0$ bis $n\varphi = n.360^0$ im ganzen n Windungen, die aus angegebenem Grunde ($\varrho^n > \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$) alle um den Nullpunkt O herumgehen. Die in der Figur nur angedeutete eine Windung entspricht der bekannten Funktion:

$$81(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) + 54(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + 5,$$

welche aus der Gleichung: $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$ entspringt, wenn man darin $x = \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ und dann $\varrho = 3$ setzt.

ganz aufserhalb desselben liegt, sondern durch denselben hindurchgeht. Überdies ist auch klar, dafs alle Punkte des von der ersten Windung t_0 tn und der geraden Linie nt_0 begrenzten Stücks der Zahlenebene, mithin auch der Nullpunkt O zum Vorschein kommen müssen, und hiermit ist nun bewiesen, dafs es für ϱ und φ solche Werte giebt, welche den Ausdruck (2) zu Null machen, folglich auch, weil wir ϱ $(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ statt $p + qi$ substituiert haben, dafs für x wenigstens ein Wert von der Form $p + qi$ (wo jedoch p oder q auch $= 0$ sein kann) existiert, welcher die Funktion (1) annulliert, mit andern Worten: jede rationale algebraische Gleichung $n$ten Grades hat eine Wurzel und mithin n Wurzeln (§ 107).

109.

Über die nicht leichte Theorie der höhern Gleichungen haben sich die Mathematiker von jeher sehr viel den Kopf zerbrochen. Je näher man ihr auf die Spur gekommen zu sein glaubt, sagt Montucla, je tiefer verkriecht sie sich. Die Lösung der gemischten quadratischen Gleichungen erforderte schon einen kleinen Kunstgriff. Mit den höhern Graden aber steigern sich auch die Schwierigkeiten, und obgleich die gröfsten Analysten sich angestrengt haben, diese sich türmenden Schwierigkeiten zu überwinden, so ist doch bis jetzt, was die Hauptsache, nämlich die Auflösung der höhern Gleichungen, d. i. die Auffindung ihrer Wurzeln betrifft, das erwünschte Ziel noch nicht erreicht, jedoch sind mehrere schon an sich merkwürdige Sätze aufgefunden worden, welche vielleicht dazu beitragen können, an dies Ziel zu gelangen. Die wichtigsten dieser Sätze, zu welchen die vorhergehenden die Grundlage bilden, wollen wir im Folgenden mitteilen.

2. Eigenschaften.

110.

Bildet man aus n einfachen Faktoren $x - a_1$, $x - a_2 \ldots x - a_n$, das Produkt $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Mx + N$, so sind die Koeffizienten A, B...N des Produkts im voraus durch die Gröfsen a_1, $a_2 \ldots$ bestimmt. Mit andern Worten: die Koeffizienten in einer alge-

braischen Gleichung sind Funktionen von den Wurzeln. Es sollen nun diese Funktionen, d. h. die Beziehungen, welche unter den Koeffizienten einer Gleichung und ihren Wurzeln stattfinden, gefunden werden.

Man denke sich zu dem Ende die n einfachen Faktoren wie angedeutet, untereinander gestellt, die Zeiger 1, 2 eingeführt, und das Produkt nach § 26 durch Variation gebildet, so ist leicht einzusehen, dafs, weil der Zeiger 1, an welcher Stelle er auch stehen möge, immer x bedeutet, der Zeiger 2 aber in der letzten Stelle a_1, in der vorletzten a_2 &c. vertritt, und jede Variationsform immer n Faktoren enthält, die erste: 1111 ... 111, $= x^n$ ist. Die zweite Variationsform ist 1111 ... 112, $= a_1 x^{n-1}$. Da nun aber der Zeiger 2 an allen n Stellen zu stehen kommt, so braucht man die ihn enthaltenden Variationsformen nicht alle zu bilden. Man kann dieselben jetzt auf kürzerm Wege erhalten. Die Summe der Koeffizienten von x^{n-1} oder der Koeffizient A ist offenbar gleich der Summe der Kombinationen aus $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$ zur ersten Klasse, d. i. gleich der Summe aller Wurzeln, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen. Denn wären z. B., wie hier angenommen, alle Wurzeln positiv, so kommen sie in den einfachen zweiteiligen Faktoren $x - a_1$, $x - a_2$ &c. alle mit dem Minuszeichen vor und umgekehrt. Dasselbe gilt offenbar auch, wenn die Wurzeln teils positiv, teils negativ sind. Da ferner aus der Variationsform 1111 ... 122, $= a_1 a_2 x^{n-2}$ alle übrigen, in welchen der Zeiger 2 an zwei Stellen vorkommt, hervorgehen, indem man diese Form permutiert denkt, wodurch offenbar der Zeiger 2 oder die Elemente $a_1\, a_2 \ldots a_n$ in allen möglichen Kombinationen zur zweiten Klasse zum Vorschein

$$\begin{array}{l} \underbrace{1}\ \ \underbrace{2} \\ x - a_n \\ x - a_{n-1} \\ \vdots \\ x - a_4 \\ x - a_3 \\ x - a_2 \\ x - a_1 \\ \hline 1111 \ldots 111, = x^n \\ 1111 \ldots 112, = a_1 x^{n-1} \\ 1111 \ldots 121, = a_2 x^{n-1} \\ 1111 \ldots 122, = a_1 a_2 x^{n-2} \\ 1111 \ldots 211, = a_3 x^{n-1} \\ 1111 \ldots 212, = a_1 a_3 x^{n-2} \\ \vdots \qquad \vdots \\ 2111 \ldots 111, = a_n x^{n-1} \\ 2111 \ldots 112, = a_1 a_n x^{n-2} \\ 2111 \ldots 121 \\ 2111 \ldots 122 \\ \vdots \qquad \vdots \\ 2222 \ldots 222, = a_1\, a_2 .. a^n \end{array}$$

kämen, so ist offenbar die Summe der Koeffizienten von x^{n-2}, d. i. der Koeffizient B, gleich der Summe der Kombinationen aller Wurzeln zur zweiten Klasse, und zwar mit demselben Vorzeichen. Denn welche Vorzeichen die Wurzeln auch haben mögen, so wird das Produkt aus je zwei, mit demselben oder umgekehrtem Vorzeichen, doch dasselbe; z. B. $a_1 . a_2 = (-a_1)(-a_2)$; $a_1 . (-a_2) = -a_1 . (a_2)$ &c.

Ebenso ist nun wohl einleuchtend, dafs die Summe der Koeffizienten von x^{n-3}, d. i. C, gleich ist der Summe aller Kombinationen der Wurzeln $a_1\ a_2 \ldots a_n$ zur 3ten Klasse, aber mit umgekehrtem Vorzeichen. Denn wären alle Wurzeln $+$ oder alle $-$, so würde offenbar das Produkt aus je drei das umgekehrte Vorzeichen haben. Dasselbe gilt auch, wenn die Wurzeln verschiedene Vorzeichen haben. Denn wären z. B. drei Wurzeln $+a$, $-b$, $-c$, so wäre das Produkt $+abc$. Weil aber in den einfachen zweiteiligen Faktoren der Gleichung die Vorzeichen der Wurzeln entgegengesetzt sind, $x-a$, $x+b$, $x+c$, so mufs sich im Produkt auch das Vorzeichen von $+abc$ umkehren &c. Das letzte Glied N ist demnach das Produkt aus allen Wurzeln mit demselben oder umgekehrtem Vorzeichen, je nachdem dieses letzte Glied ungerade oder gerade ist. In Zeichen: es ist in

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Mx + N = 0,$$

wenn $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n$ die Wurzeln bedeuten, allemal

$$A = -(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = -\overset{1}{C}(a_1\, a_2 \ldots a_n),$$

$$B = \quad a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n = +\overset{2}{C}(a_1\, a_2 \ldots a_n),$$

$$C = -(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \ldots) = -\overset{3}{C}(a_1\, a_2 \ldots a_n),$$

$$\vdots$$

$$N = (-1)^n (a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots \ldots a_n) = (-1)^n \overset{n}{C}(a_1\, a_2 \ldots a_n).$$

Zusatz. Aus Vorstehendem folgt, dafs, wenn in einer Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Mx + N = 0$ das zweite Glied fehlt, also $A = 0$ ist, dann die Summe aller Wurzeln auch $= 0$ ist. Fehlte das dritte Glied, also $B = 0$, so wäre die Summe der Produkte aus je zwei der Wurzeln $= 0$ &c.

Bilden wir z. B. aus den drei Wurzeln $+1$, $+2$ und -3 die entsprechende Gleichung

$$(x-1)(x-2)(x+3) = x^3 - 7x + 6 = 0,$$

so fehlt in dieser unvollständigen Gleichung dritten Grades das zweite Glied, weil die Summe der Wurzeln $1+2-3=0$ ist. Die Summe der Produkte aus je zwei mit demselben Vorzeichen genommen ist $1.2-1.3-2.3=-7$. Das Produkt aus allen drei mit umgekehrtem Vorzeichen genommen ist $=-1.2.(-3)=+6$.

111.

Bezeichnet man die Summe der *n*ten Potenzen der Wurzeln mit S_n, z. B. $a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4=S_4$, so ist (s. § 110.)

$$S_1=a_1+a_2+\ldots+a_n=-A, \text{ oder}$$
$$S_1+A=0\ldots\ldots\ldots(1).$$

Ferner:

$$[-(a_1+a_2+\ldots+a_n)]^2=A^2 \text{ oder}$$
$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots)=A^2, \text{ d. i.}$$
$$S_2+2B-A^2=0 \text{ oder}$$
$$S_2+A(-A)+2B=0 \text{ oder}$$
$$S_2+AS_1+2B=0\ldots\ldots(2).$$

In gleicher Weise findet man

$$\left.\begin{array}{l} S_3+AS_2+BS_1+3C=0 \\ S_4+AS_3+BS_2+CS_1+4D=0 \end{array}\right\} (3).$$

Hieraus ergiebt sich zugleich

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=-A,$$
$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=A^2-2B,$$
$$a_1^3+a_2^3+a_3^3+\ldots+a_n^3=-A^3+3AB-3C,$$
$$a_1^4+a_2^4+a_3^4+\ldots+a_n^4=A^4-4A^2B+4AC+2B^2-4D.$$

112.

Lehrsatz. Wenn eine Gleichung mit reellen Koeffizienten

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N=0$$

eine imaginäre Wurzel von der Form $\alpha+\beta i$ hat, so hat sie notwendig auch noch eine zweite, die sogenannte konjugierte Wurzel von der Form $\alpha-\beta i$.

1. **Beweis.** Ist $\alpha+\beta i$ eine Wurzel der Gleichung, so ist $x-\alpha-\beta i$ einer der n einfachen Faktoren. Da nun die Koeffizienten A, B...N reelle Gröfsen sein sollen, so mufs

sich unter den n einfachen Faktoren der Gleichung notwendig noch ein zweiter Faktor von der Form $x-\alpha+\beta i$ befinden; denn nur der Faktor $x-\alpha+\beta i$ giebt, mit $x-\alpha-\beta i$ multipliziert, ein reelles Produkt. Es ist nämlich:

$$(x-\alpha-\beta i)\,(x-\alpha+\beta i)=(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2.$$

2. **Beweis.** Ist $\alpha+\beta i$ eine Wurzel der Gleichung, so kommt, wenn man diese Gröfse statt x substituiert, ein Resultat von der Form $T+Ui$, und es ist klar, dafs alle geraden Potenzen von βi, weil reell, in T, und alle ungeraden Potenzen von βi in Ui enthalten sind. Setzt man $\alpha-\beta i$ statt x, so mufs, weil die geraden Potenzen von $-\beta i$ dieselben wie von $+\beta i$, die ungeraden Potenzen von $+\beta i$ und $-\beta i$ aber entgegengesetzt sind, offenbar das Resultat der Substitution $=T-Ui$ sein, mithin, wenn $\alpha+\beta i$ eine Wurzel, also $T=0$, $U=0$ ist, so ist auch $\alpha-\beta i$ eine Wurzel.

Wenn also eine Gleichung mit reellen Koeffizienten imaginäre Wurzeln hat, so sind sie immer gepaart vorhanden.

Hat man daher eine solche Wurzel $\alpha+\beta i$ nachgewiesen, so kann man die linke Seite gleich durch $(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ dividieren. In dem entstehenden Quotienten: $x^{n-2}+A_2 x^{n-3}+\ldots+N_2$ sind die Koeffizienten wieder reelle Gröfsen. (Vergl. Randanmerkung § 108.)

113.

Lehrsatz. Eine Gleichung von unpaarem (ungeradem) Grade hat wenigstens eine reelle Wurzel, und zwar eine positive oder negative, je nachdem das letzte Glied negativ oder positiv ist.

Beweis. Man denke sich die linke Seite konstruiert. Setzt man $x=0$, so giebt das letzte Glied N die Ordinate. Nun kann man für x einen so grofsen Wert $\pm a$ gesetzt denken, dafs das erste Glied gröfser wird, als die Summe aller folgenden, und das entgegengesetzte Vorzeichen von N hat &c. (§ 100). So hat z. B. die Gleichung:

$$x^5+3x^2+2x+7=0$$

wenigstens eine reelle (negative) Wurzel. Denn setzt man $x=0$, so ist der Betrag der linken Seite $=+7$, und setzt man x nur $=-2$, so ist der Betrag der linken Seite $=-17$ &c. (§ 100).

114.

Lehrsatz. Eine Gleichung von paarem (geradem) Grade, deren letztes Glied negativ ist, hat wenigstens zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative.

Beweis. Sei die Gleichung

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + \ldots + Mx - N = 0.$$

Denkt man sich die linke Seite konstruiert und setzt $x = 0$, so erhält man eine negative Ordinate: $-N$. Setzt man hierauf für x eine hinreichend grofse positive und auch negative Zahl $\pm a$, so wird $(\pm a)^{2m}$ positiv und gröfser als die Summe aller folgenden Glieder, wenn auch alle negativ wären. Man hat also rechts und links der negativen Ordinate $-N$ noch eine positive Ordinate, und die Linie, welche durch die Endpunkte aller drei Ordinaten geht, mufs die Abscissenlinie wenigstens zweimal schneiden. (§ 100.)

115.

Lehrsatz. Ist eine Gleichung von paarem Grade und ihr letztes Glied positiv, so können alle ihre Wurzeln imaginär sein.

Beweis. Aus § 112 1stem Beweis folgt, dafs, wenn alle Wurzeln einer Gleichung imaginär, folglich auch gepaart sind, das letzte Glied, nämlich das Produkt, aus den gepaarten imaginären Wurzeln immer positiv ist. (§ 110.)

116.

Lehrsatz. Wenn die Wurzeln einer Gleichung alle reell und ganze Zahlen sind, so sind die Koeffizienten der Gleichung notwendig auch ganze Zahlen, und die Wurzeln sind in diesem seltenen Falle leicht zu finden, indem man das letzte Glied in Faktoren zerlegt, dann diese Faktoren, sowohl positiv als negativ genommen, statt x substituiert und zusieht, welche von ihnen der Gleichung Genüge leisten.

Beweis. Dies folgt aus der Bildung der Gleichung § 110, wonach das letzte Glied = dem Produkt aus allen Wurzeln multipliziert mit $(-1)^n$ ist.

117.

Lehrsatz. Sind in einer Gleichung alle Koeffizienten ganze Zahlen, so sind die etwaigen reellen Wurzeln, wenn sie keine ganze Zahlen sind, notwendig irrational.

Beweis. Angenommen: es sei ein echter oder unechter Bruch $\frac{a}{b}$ eine Wurzel der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0,$$

$$\text{mithin } \frac{a^n}{b^n} + A\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + B\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \ldots + M\frac{a}{b} + N = 0.$$

Dafs nun aber diese letzte Gleichung nicht möglich ist, leuchtet ein, wenn man mit b^{n-1} multipliziert; denn dann hätte man

$$\frac{a^n}{b} + Aa^{n-1} + Ba^{n-2}b + \ldots + Mab^{n-2} + Nb^{n-1} = 0.$$

Da aber das erste Glied $\frac{a^n}{b}$ keine ganze Zahl sein kann (Algebra § 316), alle darauf folgenden aber nach der Voraussetzung ganze Zahlen sind, so ist klar, dafs der Betrag aller Glieder nicht $= 0$ sein kann.

Die Gleichung $x^5 - 10x^2 - 10x - 6 = 0$ z. B. hat eine Wurzel $x = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4}$. Die Gleichung $x^6 - 6x^4 - 28x^3 - 18x^2 + 12x - 2 = 0$ hat eine Wurzel $x = \sqrt[6]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$.

118.

Den vorhergehenden Paragraphen fügen wir noch folgende sich von selbst verstehende Sätze ohne Beweis hinzu:

1) Wenn alle Glieder einer Gleichung das + Zeichen haben, so hat eine solche Gleichung keine positive Wurzeln (§ 110).

2) Wenn alle Wurzeln einer Gleichung reell und negativ sind, so ist die Gleichung notwendig vollständig, und alle Glieder sind positiv.

3) Wenn eine Gleichung lauter gerade Potenzen der unbekannten Gröfse enthält, so sind die Wurzeln paarweise gleich, aber entgegengesetzt. Denn wenn $+a$ der Gleichung Genüge

leistet, so mufs auch, der geraden Potenzen halber, $-a$ derselben Genüge leisten.

3. Umformung der Gleichungen.

119.

Um aus einer Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0 \ldots\ldots. (1)$$

eine andere abzuleiten, deren Wurzeln sämtlich um eine bestimmte Gröfse, h, gröfser sind, setze man $y-h$ statt x, so erhält man die neue Gleichung

$$(y-h)^n + A(y-h)^{n-1} + B(y-h)^{n-2} + \ldots + M(y-h) + N = 0 \ldots (2)$$

und es ist klar, dafs, wenn irgend ein Wert a, statt x gesetzt, der Gleichung (1) Genüge leistet, dann der Wert $a+h$, statt y gesetzt, der Gleichung (2) Genüge leistet.

Umgekehrt werden alle Wurzeln der Gleichung (1) um die beliebige Gröfse h kleiner, wenn man $y+h$ statt x substituiert.

Beispiel. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

sollen alle um 1 verkleinert werden.

Setzt man $y+1$ statt x, so hat man

$$(y+1)^3 - 2(y+1)^2 - 9(y+1) + 18 = 0,$$

oder entwickelt

$$y^3 + y^2 - 10y + 8 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Die Gleichung (3) hat die Wurzeln 2, 3, -3; die Gleichung (4) aber die Wurzeln 1, 2, -4.

120.

Vorstehender Satz kann benutzt werden, um aus einer Gleichung eine andere abzuleiten, in welcher das zweite Glied fehlt. Soll z. B. aus der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

eine andere abgeleitet werden, in welcher das zweite Glied

fehlt, so setze man vorläufig $y+h$ statt x, entwickele und ordne, so kommt

$$y^3+(3h-2).y^2+(3h^2-4h-9).y+(h^3-2h^2-9h+18)=0\,..\,(2)$$

Damit nun das zweite Glied, $(3h-2)y^2$, herausfällt, nehme man h so, dafs $3h-2=0$, mithin $h=\frac{2}{3}$, so erhält man die Gleichung

$$y^3-\frac{31}{3}y+\frac{308}{27}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

In dieser vom zweiten Gliede befreiten Gleichung (3) sind die Wurzeln um $\frac{2}{3}$ kleiner, als in der Gleichung (1).

Allgemein, um aus der Gleichung:

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N=0$$

eine andere abzuleiten, in welcher das zweite Glied fehlt, mufs man $y-\frac{A}{n}$ statt x substituieren. Denn setzt man $y+h$ statt x, so hat man

$$(y+h)^n+A(y+h)^{n-1}+B(y+h)^{n-2}+\ldots+M(y+h)+N=0,$$

oder entwickelt

$$y^n+(nh+A).y^{n-1}+\left\{\frac{n.(n-1)}{1\,.\,2}h^2+(n-1)h.A+B\right\}.y^{n-2}+\ldots\ldots=0.$$

Damit das zweite Glied herausfällt, mufs $nh+A=0$, mithin $h=-\frac{A}{n}$ sein. Wollte man das dritte Glied fortschaffen, so hätte man, um h zu bestimmen, eine quadratische, und um das vierte Glied fortzuschaffen, eine kubische Gleichung zu lösen &c.

Anmerkung. Um in der Gleichung $x^3+Ax^2+B=0$ das zweite Glied zu beseitigen, setzt man einfacher $x=\frac{1}{y}$; denn dann entsteht $\frac{1}{y^3}+\frac{A}{y^2}+B=0$, oder $y^3+\frac{Ay}{B}+\frac{1}{B}=0$.

121 a.

Um aus einer Gleichung

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N=0$$

eine andere abzuleiten, deren Wurzeln h mal so grofs sind, setze man $\frac{y}{h}$ statt x. Diese Umformung könnte benutzt werden, wenn mehrere Wurzeln sehr nahe gleich sind, indem man durch

hinreichende Vervielfachung der Wurzeln dieselben weiter auseinander bringen kann, sowie auch, um aus einer Gleichung, deren Koeffizienten Brüche sind, eine andere abzuleiten, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind. Man braucht zu diesem letztern Zwecke nur h so zu nehmen, dafs die Nenner verschwinden, wenn der erste Koeffizient mit h, der zweite mit h^2, der dritte mit h^3 u. s. w. multipliziert wird. Soll z. B. aus der Gleichung

$$x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{6} = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

eine andere abgeleitet werden, in welcher die Koeffizienten ganze Zahlen sind, so substituiere man $\frac{y}{6}$ statt x, so kommt

$$\frac{y^5}{6^5} - \frac{2}{3}\cdot\frac{y^4}{6^4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{6^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{6} + \frac{5}{6} = 0,$$

$$\text{oder } y^5 - 4y^4 + 54y^2 - 648\,y + 6480 = 0.$$

In dieser Gleichung mit ganzen Koeffizienten sind alle Wurzeln 6mal so grofs, als die der Gleichung (1).

121 b.

Um die Wurzeln einer Gleichung h mal so klein werden zu lassen, setze man $x = hy$. Durch diese Umformung lassen sich die Koeffizienten in kleinere verwandeln. Ist z. B. $x^3 - 112x - 128 = 0$ gegeben, so setze $x = 4y$ und es entsteht

$$4^3 . y^3 - 112 . 4y - 128 = 0, \text{ oder}$$

$$y^3 - 7y - 2 = 0.$$

In dieser Gleichung sind alle Wurzeln 4mal so klein als in der gegebenen.

122.

Um aus einer Gleichung eine andere mit gerade entgegengesetzten Wurzeln abzuleiten, setze man $-x$ statt x. Die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$$

hat die drei Wurzeln 2, 3, -3. Die Gleichung:

$$(-x)^3 - 2(-x)^2 - 9(-x) + 18 = 0$$

$$\text{oder } x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$$

hat die Wurzeln -2, -3, $+3$.

123.

Um aus einer Gleichung eine andere abzuleiten, deren Wurzeln die reciproken Werte der erstern sind, substituiere man $\frac{1}{y}$ statt x. Die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$$

enthält die Wurzeln 2, 3, —3. Setzt man $\frac{1}{y}$ statt x, so kommt

$$\frac{1}{y^3} - 2 . \frac{1}{y^2} - 9 . \frac{1}{y} + 18 = 0$$

$$\text{oder } 1 - 2y - 9y^2 + 18y^3 = 0$$

$$y^3 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{9}y + \frac{1}{18} = 0.$$

Letztere Gleichung hat die drei Wurzeln $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$.

124.

Erklärung. Wenn in einer Gleichung zwei gleiche Vorzeichen unmittelbar aufeinander folgen, so nennt man dies eine F o l g e, und wenn zwei entgegengesetzte Vorzeichen aufeinander folgen, eine A b w e c h s e l u n g der Vorzeichen. So hat z. B. die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$$

zwei Abwechselungen + —, — +, und eine Folge — —.

Es ist klar, dafs in einer v o l l s t ä n d i g e n Gleichung vom $n$ten Grade die Summe der Folgen und Abwechselungen $= n$ ist.

125.

Lehrsatz. Eine Gleichung (vollständig oder unvollständig) kann nicht m e h r positive Wurzeln haben, als Abwechselungen.

Beweis. Nehmen wir folgende (vollständige oder unvollständige) Gleichung von beliebigen Vorzeichen:

$$x^n + \ldots - Mx^p - \ldots + Nx^q + \ldots \mp + Px^r \pm \ldots \pm T = 0 \ldots\ldots (1)$$

die nach den Exponenten, so wie sie von n an kleiner sind, geordnet ist, so können wir annehmen, dafs die beiden ersten Glieder entweder unmittelbar aufeinander folgen oder doch

die etwa dazwischen liegenden Glieder alle das $+$ Zeichen haben und mithin bei M die erste Abwechselung stattfindet. Bei N finde ebenso die zweite Abwechselung statt. Zwischen N und $\pm$ P mögen beliebig viele Abwechselungen fallen, bei P aber die letzte, d. h. $\mathrm{P}x^r$ ist entweder das letzte Glied (wenn $r=0$), oder die noch folgenden Glieder haben dasselbe Vorzeichen wie P. Irgendwo mufs notwendig die letzte Abwechselung stattfinden.

Um nun aus dieser Gleichung die nächst höhere zu erhalten, welche die neue positive Wurzel $+a$ enthält, müssen wir sie mit $x-a$ multiplizieren. Die Multiplikation mit x läfst alle Vorzeichen unverändert, die Multiplikation mit $-a$ aber kehrt sie alle um, und man erhält:

$$\begin{array}{r|r|r|l}
x^{n+1} + \,.\,.\, - \mathrm{M} & x^{p+1} - \,.\,.\, + \mathrm{N} & x^{q+1} + \,.\,.\, \mp \pm \mathrm{P} & x^{r+1} \pm \,.\,.\, \pm \mathrm{T}x \\
- \mu & + \nu & \pm \pi & \quad \mp \,.\,.\, \mp \quad \mp \mathrm{T}a \\
\hline
\end{array}$$

$$x^{n+1} + \,.\,.\, - \mathrm{M}^1 \; x^{p+1} - \,.\,.\, + \mathrm{N}^1 \; x^{q+1} + \,.\,.\,.\, \pm \mathrm{P}^1 \; x^{r+1} \,.\,.\,.\,.\,.\,. \mp \mathrm{T}a \ldots (2)$$

Weil in Gleichung (1) von x^n bis $-\mathrm{M}x^p$ alle Vorzeichen $+$ sind, so ist klar, dafs, wenn die Multiplikation mit $-a$ noch ein Glied in x^{p+1} giebt, dies Glied (μx^{p+1}) und mithin auch M^1 notwendig negativ ist. Aus demselben Grunde ist N^1 positiv, ob in (1) zwischen $\mathrm{M}x^p$ und $\mathrm{N}x^q$ noch ein Glied in x^{q+1} enthalten ist oder nicht, d. h. ob ν positiv oder Null ist &c. Man sieht also, dafs es in der neuen Gleichung (2) von x^{n+1} bis $\pm \mathrm{P}x^{r+1}$ wenigstens ebenso viele Abwechselungen giebt, als in der ursprünglichen Gleichung (1) von x^n bis $\mathrm{P}x^r$. Von da an giebt es in der Gleichung (1) keine Abwechselungen mehr, in der neuen Gleichung (2) jedoch wenigstens noch eine Abwechselung von $\pm \mathrm{P}^1 x^{r+1}$ bis $\mp \mathrm{T}a$.

Da nun jede (vollständige oder unvollständige) Gleichung als ein Produkt aus einfachen zweiteiligen Faktoren gedacht werden kann, und jeder einfache Faktor, der einer positiven Wurzel entspricht ($x-a$), wenigstens einen Zeichenwechsel giebt, so ist klar, dafs eine jede Gleichung wenigstens so viele Zeichenwechsel als positive Wurzeln hat, oder, was dasselbe ist: eine Gleichung kann jedenfalls nicht mehr positive Wurzeln als Abwechselungen haben. Diesen strengen Beweis hat Gauss zuerst gegeben.

126.

Weil nach § 122 die negativen Wurzeln in positive und umgekehrt verwandelt werden, wenn man $-x$ statt $+x$ setzt, so ergiebt sich noch ein zweiter Lehrsatz, nämlich: eine Gleichung kann nicht mehr negative Wurzeln haben, als die in $-x$ umgeformte Gleichung positive hat.

So kann z. B. die Gleichung

$$x^7 - 3x^2 + 4x + 6 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

höchstens nur zwei positive und eine negative Wurzel haben, denn die Gleichung hat nur zwei Abwechselungen, und die in $-x$ umgeformte Gleichung, nämlich $x^7 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$, hat nur eine Abwechselung. Da nun aber die Anzahl aller Wurzeln $= 7$ ist, so mufs die Gleichung wenigstens vier imaginäre Wurzeln haben.

127 a.

Nach vorstehenden beiden Paragraphen kann man also nicht im voraus bestimmen, wie viel reelle und wie viel imaginäre Wurzeln eine vorgelegte Gleichung hat, wohl aber, wie viel reelle Wurzeln sie höchstens haben kann, und wenn diese Zahl kleiner ist, als der Grad der Gleichung, wie viel imaginäre Wurzeln sie dann wenigstens haben mufs.

127 b.

Ist eine Gleichung vollständig, und sind alle ihre Wurzeln reell, so hat sie offenbar genau so viel positive Wurzeln, als Abwechselungen, und so viel negative, als Folgen der Zeichen, weil die Summe der Folgen und Abwechselungen einer vollständigen Gleichung mit dem Grade derselben übereinstimmt.

128.

Erklärung. Gleichungen, in welchen der letzte Koeffizient $= 1$ und alle Koeffizienten der vom ersten und letzten Gliede gleichweit abstehenden Potenzen von x einander gleich sind, heifsen reciproke Gleichungen, weil dieselben unverändert

bleiben, wenn für x der reciproke Wert $\frac{1}{x}$ substituiert wird. Eine solche Gleichung ist z. B.

$$x^5 - 8x^4 + \frac{x^3}{10} + \frac{x^2}{10} - 8x + 1 = 0.$$

Dividiert man eine reciproke Gleichung vom ungeraden Grade durch $x+1$, so erhält man eine um einen Grad niedrigere reciproke Gleichung (vom geraden Grade).

Sind die Koeffizienten einer Gleichung vom letzten Gliede an rückwärts den ersten Koeffizienten entgegengesetzt, so giebt die Division durch $x-1$ eine um einen Grad niedrigere reciproke Gleichung (vom geraden Grade).

Der Beweis ist in beiden Fällen leicht durch Multiplikation der reciproken Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Ax + 1 = 0$ mit $x+1$ oder $x-1$ geführt.

Jede reciproke Gleichung vom geraden und zwar $2n$ten Grade (und auf eine solche kann nach den vorstehenden Sätzen auch jede reciproke Gleichung vom ungeraden Grade gebracht werden) reduziert man durch Division mit x^n und nachheriger Substitution von y statt $x + \frac{1}{x}$ auf eine Gleichung, deren Grad halb so grofs, als der der ursprünglichen Gleichung.

Beispiel. $x^5 - 11x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 11x - 1 = 0.$
Durch $x-1$ dividiert (eine Wurzel also $x=1$):

$$x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 1 = 0.$$

Durch x^2 dividiert

$$x^2 - 10x + 6 - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \; \ldots\ldots \; (1)$$

Setzt man hier $x + \frac{1}{x} = y$, so ist

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2.$$

Diese Gleichung von Gleichung (1) subtrahiert:

$$-10x + 4 - \frac{10}{x} = -y^2,$$

durch -10 dividiert

$$x - \tfrac{2}{5} + \frac{1}{x} = \frac{y^2}{10}$$

$$x \quad + \frac{1}{x} = y \text{ subtrahiert}$$

$$- \tfrac{2}{5} = \frac{y^2}{10} - y.$$

Hieraus ergiebt sich $y = 5 \pm \sqrt{21}$ und aus $x + \frac{1}{x} = 5 + \sqrt{21}$ die noch fehlenden 4 Wurzeln der gegebenen Gleichung*).

129.

Wir haben nun in dem Vorhergehenden die wichtigsten Sätze über die algebraischen Gleichungen mitgeteilt, welche möglicherweise zur Entdeckung einer bequemen Auflösungsmethode behilflich sein könnten, die, wie schon in § 109 bemerkt, bis jetzt noch nicht gefunden ist. Nur zwei in neuerer Zeit angegebene verdienen erwähnt zu werden. Erstens die Gräfesche, welche den von der Berliner Akademie darauf gesetzten Preis erhielt. Man findet diese von Encke verbesserte Methode in dem Berliner astronomischen Jahrbuch von 1841. Diese Methode ist aber so unerträglich weitläufig und beschwerlich, daſs selbst ein so auſserordentlich schneller Rechner wie Encke dennoch volle drei Stunden gebrauchte, um danach nur eine Gleichung vom siebenten Grade aufzulösen, d. h. alle ihre reellen sowohl als imaginären Wurzeln zu finden. Zweitens die Methode von Gauſs**). Diese ist allerdings bedeutend bequemer, paſst aber nur für dreigliedrige Gleichungen. Diese beiden Methoden würden zusammen einen Band füllen, und können schon deshalb hier nicht Platz finden.

Bei den Anwendungen der höhern Gleichungen auf wirkliche Fälle des praktischen Lebens kommt es jedoch sehr häufig vor, daſs man nicht alle Wurzeln, sondern nur eine (und zwar

*) Noch andere Sätze über die reciproken Gleichungen, überhaupt aber eine erschöpfende Abhandlung in präzisester Darstellung über diesen Gegenstand findet man allein im 3. Teil des Lehrbuchs der Arithmetik von Rich. Schurig (§ 87).

**) Gauſs Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Göttingen, in der Dieterichschen Buchhandlung.

aus andern Gründen oftmals schon halbweg bekannte) positive Wurzel zu bestimmen braucht. In solchen Fällen kann man dann, jedenfalls viel bequemer, auf folgende indirekte Weise verfahren:

Man substituiere die näherungsweise bekannte oder gemutmaſste Wurzel. Das Resultat der Substitution wird dann zeigen, ob die Wurzel zu groſs oder zu klein ist. Macht man mit der allmählich veränderten Wurzel ein paar Substitutionen mehr, so wird man die Wurzel so genau erhalten, als die praktischen Zwecke es erfordern*).

Weiſs man, daſs die gesuchte Wurzel >1 ist, so kann man die Gleichung auch auf die höchste Potenz der Unbekannten reduzieren und umgekehrt, wenn die Wurzel <1 ist.

Sucht man z. B. die positive Wurzel der Gleichung

$$x^3-2x-5=0,$$

welche offenbar >2 (§ 113), so hat man aus $x^3=5+2x$

$$x=\sqrt[3]{5+2x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Setzt man rechter Hand $x=2$, so ist $x=\sqrt[3]{9}=2{,}08\ldots$; setzt man aufs neue rechter Hand $x=2{,}08$, so ist $x=\sqrt[3]{9{,}16}=2{,}092\ldots$; dann: $x=\sqrt[3]{9{,}184}=2{,}094$. Ferner $x=\sqrt[3]{9{,}188}=2{,}0945$ (bis auf vier Dezimalen genau).

Schreitet eine unendliche Reihe nach Potenzen einer Unbekannten fort, von der man weiſs, daſs sie genügend konvergiert, so kann man dieselbe zunächst mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten in einen Quotient verwandeln**).

Es sei z. B.

$$x+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{5}+\frac{x^4}{7}+\frac{x^5}{9}+\frac{x^6}{11}+\ldots=\frac{1}{10}$$

---

*) Die Regel: daſs man zwei Werte, a und b, suchen soll, welche, statt x gesetzt, entgegengesetzte Resultate geben, zwischen welchen Werten, a und b, dann die wahre Wurzel zu suchen sein würde (§ 100), ist offenbar falsch, denn die aus der konstruierten Gleichung entspringende Linie kann ganz oberhalb der Abscissenachse liegen oder auch dieselbe nur berühren, statt zu schneiden. In diesem Falle existieren die erwähnten Werte a und b gar nicht.

**) Vergl. Lehrbuch der Arithmetik von Rich. Schurig, 3. Teil, S. 270.

gegeben. Da nun

$$\frac{x+Ax^2}{1+Bx+Cx^2}=x+(A-B)x^2+(B^2-C-AB)x^3$$
$$+(AB^2+2BC-AC-B^3)x^4+\ldots,$$

so ist

$$A-B=\tfrac{1}{3},\ B^2-C-AB=\tfrac{1}{5},$$
$$AB^2+2BC-AC-B^3=\tfrac{1}{7},$$

aus welchen Gleichungen sich

$$A=-\tfrac{11}{21},\ B=-\tfrac{6}{7},\ C=\tfrac{3}{35}$$ ergiebt.

Die gegebene Gleichung wird jetzt

$$\frac{x-\frac{11x^2}{21}}{1-\frac{6x}{7}+\frac{3x^2}{35}}=\tfrac{1}{10}$$

und man findet $x=0{,}09383337$ bis zur letzten Dezimalstelle genau. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dafs die Gleichung nur zu einer Gleichung zweiten Grades führt und die Glieder bis x^4 vollständig enthält, x^5 aber noch annähernd berücksichtigt ist.

Bekanntlich führt in der Rentenrechnung die Bestimmung der Prozente p aus der Mise m, der Rente r und der Zeit a (in Jahren) zu einer allgemein nicht aufzulösenden Gleichung. Löst man dagegen $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{a+1}$ nach dem binomischen Lehrsatz auf, so erhält man durch die vorstehende Methode unter Anwendung einiger Kunstgriffe den überaus bequemen logarithmischen und selbst für ein gröfseres a noch auf etliche Dezimalstellen richtigen Ausdruck *)

$$p=\frac{200\,(ar-m)}{(a+1)\,m}\cdot\left(\frac{m}{ar}\right)^{\frac{a-1}{3(a+1)}}.$$

Der Taylorsche Lehrsatz bietet übrigens oft noch leichtere Mittel zur Auflösung der Gleichungen dar, und es scheint eine vollständige Theorie der höheren Gleichungen die Differentialrechnung nicht ganz umgehen zu können.

*) Vergl. Lehrbuch der Arithmetik von R. Schurig, 3. Teil, S. 422.

Neuntes Buch.

Auflösung aller zweigliedrigen Gleichungen.

130.

Die zweigliedrigen oder sogenannten reinen (binomischen) höhern Gleichungen lassen sich, wie Gaufs zuerst gezeigt hat*), alle direkt und leicht lösen. Wir betrachten diese Gleichungen zuerst in der Form

$$x^n \pm 1 = 0,$$

worauf sie alle gebracht werden können.

131.

Berücksichtigen wir in obiger Form zuerst das untere Zeichen, nämlich:

$$x^n - 1 = 0$$
$$x^n = 1$$

so ist klar, dafs diese Gleichung, wenn n gerade, zwei reelle Wurzeln, $+1$ und -1, und wenn n ungerade, eine reelle Wurzel, $+1$, hat und nach § 127a nicht mehr reelle Wurzeln haben kann. Die übrigen Wurzeln müssen also imaginär, und wie die Rechnung selbst gleich zeigen wird, alle verschieden sein. Mit andern Worten: es können aus ± 1 so viele verschiedene Wurzeln desselben Grades gezogen werden, als man will. Denn bezeichnen wir nach Cauchy die gewöhnliche arithmetische $n$te

*) S. Serret Cours d'algèbre supérieure. Dies Werk handelt fast blofs über höhere Gleichungen, setzt aber nicht allein alles Vorhergehende, sondern auch Differential- und Integralrechnung als bekannt voraus.

Wurzel aus 1 mit $\sqrt[n]{1}$, alle n Wurzeln aus ± 1 aber mit $((\pm 1))^{\frac{1}{n}}$, so ist, weil immer $\cos 2k\pi = 1$ und $\sin 2k\pi = 0$, wenn k irgend eine ganze Zahl ist (Trigonometrie § 60) und zufolge § 88, was auch k und n für ganze Zahlen sein mögen, immer

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n = \cos 2k\pi \pm i\sin 2k\pi = 1.$$

Da nun der Ausdruck $\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}$ auf die $n$te Potenz erhoben $+1$ giebt, so ist dieser Ausdruck auch die $n$te Wurzel aus $+1$.

Daſs nun aber, wenn in diesem Ausdruck für n eine beliebige ganze Zahl und dann für k successive die Zahlen $0, 1, 2 \ldots \frac{1}{2}n$ gesetzt werden, n verschiedene Werte (Wurzeln) kommen, folgt aus den Lehren der Trigonometrie, wonach die Ausdrücke $\cos\frac{0.\pi}{n} \pm i\sin\frac{0.\pi}{n}$, $\cos\frac{1.\pi}{n} \pm i\sin\frac{1.\pi}{n}$ &c. offenbar verschieden sind. Man findet also alle n Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, indem man in

$$x = ((1))^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

für $2k$ successive alle geraden Zahlen zwischen 0 und n, oder, was dasselbe ist, $k = 0, 1, 2, 3 \ldots \frac{1}{2}n$ setzt. Man habe z. B. die Gleichung

$$x^6 - 1 = 0,$$

so ist, weil hier $n = 6$,

$$x = ((1))^{\frac{1}{6}} = \cos\frac{2k\pi}{6} \pm i\sin\frac{2k\pi}{6},$$

für $k = 0$ ist $x = \cos 0\pi \pm i\sin 0\pi = 1$,

„ $k = 1$ „ $x = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.i$ *),

„ $k = 2$ „ $x = \cos\frac{2}{3}\pi \pm i\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.i$,

„ $k = 3$ „ $x = \cos\pi \pm i\sin\pi = -1$.

Die Gleichung $x^6 - 1 = 0$ hat also wirklich sechs verschiedene Wurzeln, und es ist

$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)(x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)(x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)$$

---

*) Es ist nämlich: $\cos\frac{1}{3}\pi = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$ und $\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

oder indem man die Faktoren, welche zweien gepaarten Wurzeln entsprechen, mit einander multipliziert, um lauter reelle Gröfsen zu erhalten, und deshalb die dreigliedrigen (trinomischen) Faktoren einführt:

$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

132.

Man könnte glauben, noch mehrere Wurzeln zu erhalten, wenn man für k Werte setzt, die über $\frac{1}{2}n$ hinausgehen. Dies ist aber eben nur eine Annahme, die schon § 104 verbietet. Denn, weil $\cos 2\frac{(\frac{1}{2}n+h)}{n}\pi = \cos\left(\pi + \frac{2h}{n}\pi\right) = -\cos\frac{2h}{n}\pi$ und auch $\cos 2\frac{(\frac{1}{2}n-h)}{h}\pi = \cos\left(\pi - \frac{2h}{n}\pi\right) = -\cos\frac{2h}{n}\pi$, so ist immer $\cos 2\frac{(\frac{1}{2}n+h)}{n}\pi = \cos 2\frac{(\frac{1}{2}n-h)}{n}\pi$, d. h. für alle Werte von k, welche ebensoviel über als unter $\frac{1}{2}n$ sind, erhält man dieselben Cosinus wieder, und ebenso dieselben Sinus, letztere nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, weil $\sin\left(\pi + \frac{2h}{n}\pi\right) = -\sin\frac{2h}{n}\pi$ und $\sin\left(\pi - \frac{2h}{n}\pi\right) = \sin\frac{2h}{n}\pi$, aus welchem Grunde gleich das doppelte Vorzeichen $\pm$ gesetzt ist. In obigem Beispiel für $x^6 - 1 = 0$ ist $\frac{1}{2}n = 3$, und es kommt z. B. für $k = 3 + 1 = 4$ derselbe Cosinus wie für $k = 3 - 1 = 2$ &c.

Hätte man die Gleichung

$$x^3 - 1 = 0,$$

so ist $x = ((1))^{\frac{1}{3}} = \cos\frac{2k\pi}{3} \pm i\sin\frac{2k\pi}{3}$

für $k = 0$ ist: $x = \cos 0 = 1$
„ $k = 1$ „ $x = \cos 120^0 \pm i\sin 120^0$
oder: $x = -\cos 60^0 \pm i\sin 60^0 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.i.$

Mithin ist

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i\right)\left(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i\right)$$
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

133.

Man kann auch, ohne erst die zweigliedrigen Faktoren von $x^n - 1$ zu suchen, gleich die dreigliedrigen berechnen. Aus

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{n}$$

folgt nämlich der eine einfache Faktor $x - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}$ und der andere zugehörige $x - \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$. Multipliziert man beide mit einander und beachtet, dafs $\cos^2\frac{2k\pi}{n} + \sin^2\frac{2k\pi}{n} = 1$, so ist der dreigliedrige Faktor

$$x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1;$$

hierin setze man $k = 0, 1, 2 \ldots \frac{1}{2}n$. Wird aber der Ausdruck ein vollkommenes Quadrat, was, wenn n gerade, für $k = 0$ und $k = \frac{1}{2}n$, und wenn n ungerade, für $k = 0$ der Fall ist, so mufs jedesmal nur die Wurzel genommen werden, indem die einfachen reellen Faktoren $x - 1$ und $x + 1$ nur einmal vorhanden sind. Sei z. B. $n = 3$, also die Gleichung $x^3 - 1 = 0$, so hat man

$$x^2 - 2x \,.\, \cos\frac{2k\pi}{3} + 1;$$

für $k = 0$ kommt: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

„ $k = 1$ „ $x^2 - 2x\cos 120^0 + 1 = x^2 + x + 1$,

daher $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Für die Gleichung $x^6 - 1 = 0$ hat man

$$x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{6} + 1,$$

für $k = 0$ kommt: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

„ $k = 1$ „ $x^2 - 2x\cos 60^0 + 1 = x^2 - x + 1$

„ $k = 2$ „ $x^2 - 2x\cos 120^0 + 1 = x^2 + x + 1$

„ $k = 3$ „ $x^2 - 2x\cos\pi + 1 = (x + 1)^2$

mithin: $x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

134 a.

Hat man allgemeiner die Gleichung

$$x^n - a = 0.$$

so sind die n einfachen Faktoren derselben*)

$$x-\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\pm i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).\sqrt[n]{a}$$

und die dreigliedrigen

$$x^2-2x.\sqrt[n]{a}.\cos\frac{2k\pi}{n}+(\sqrt[n]{a})^2.$$

134 b.

Um nun auch die n Wurzeln der andern Gleichung

$$x^n+1=0$$

zu finden, beachte man, dafs, wenn k eine beliebige ganze Zahl ist, immer $\cos(2k+1)\pi=-1$, und $\sin(2k+1)\pi=0$ (Trigonometrie § 60). Weil ferner

$$\left(\cos\frac{2k+1}{n}.\pi\pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)^n=\cos(2k+1)\pi\pm i\sin(2k+1)\pi=-1,$$

so ist notwendig auch

$$x=((-1))^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{2k+1}{n}\pi\pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi$$

worin für $2k+1$ alle ungeraden Zahlen zwischen 0 und n gesetzt werden müssen.

Die dreigliedrigen Faktoren von x^n+1 sind hier

$$x^2-2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi+1$$

und allgemein für x^n+a

$$x^2-2x.\sqrt[n]{a}.\cos\frac{2k+1}{n}\pi+(\sqrt[n]{a})^2.$$

Beispiel 1. Für $x^3+1=0$ hat man

$$x=((-1))^{\frac{1}{3}}=\cos\frac{2k+1}{3}\pi\pm i\sin\frac{2k+1}{3}\pi.$$

Für $k=0$ ist $x=\cos\frac{1}{3}\pi\pm i\sin\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.i$,
„ $k=1$ „ $x=\cos\pi\pm i\sin\pi=-1$,
mithin $x^3+1=(x+1)\,(x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}.i)\,(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}.i)$,
$x^3+1=(x+1)\,(x^2-x+1)$.

*) Aus $x^n=1.a$ folgt nämlich: $x=((1))^{\frac{1}{n}}.\sqrt[n]{a}$.

Beispiel 2. Für $x^6+1=0$ hat man

$$x=\cos\frac{2k+1}{6}\pi\pm i\sin\frac{2k+1}{6}\pi$$

Für $k=0$ ist $x=\cos\frac{\pi}{6}\pm i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sqrt{3}\pm\frac{1}{2}i,$

" $k=1$ " $x=\cos\frac{\pi}{2}\pm i\sin\frac{\pi}{2}=\pm i,$

" $k=2$ " $x=\cos\frac{5\pi}{6}\pm i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}\pm\frac{1}{2}i.$

Es ist also

$$x^6+1=(x+i)(x-i)(x-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}i)(x-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}i)(x+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}i)(x+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}i),$$
$$x^6+1=(x^2+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)(x^2+x\sqrt{3}+1).$$

Zehntes Buch.

Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen.

I. Auflösung der kubischen Gleichungen.

135.

Da man nach § 120 aus jeder kubischen Gleichung das Glied, welches die unbekannte Gröfse in der zweiten Potenz enthält, fortschaffen kann, so können wir annehmen, dafs jede aufzulösende kubische Gleichung entweder die Form

$$x^3 + px + q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

schon habe, oder erst darauf gebracht worden sei.

Wir betrachten nun die Wurzel dieser Gleichung als aus zwei Teilen, y und z, bestehend, und setzen $y + z$ statt x, so ist:

$$(y+z)^3 + p(y+z) + q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y+z) + q = 0$$

$$3yz(y+z) + p(y+z) + y^3 + z^3 + q = 0$$

$$(3yz+p)(y+z) + y^3 + z^3 + q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Könnte man nun für y und z solche Werte finden, welche der Gleichung (3), also auch der Gleichung (2), Genüge leisten, so würde offenbar auch ihre Summe, statt x gesetzt, der Gleichung (1) genügen. Der Gleichung (3) wird aber offenbar Genüge geleistet, wenn man y und z so bestimmt, dafs $3yz + p = 0$ und zugleich auch $y^3 + z^3 + q = 0$, woraus

$$yz = -\tfrac{1}{3}p,$$

$$y^3 + z^3 = -q.$$

Aus diesen beiden Gleichungen mit zwei Unbekannten findet man nun aber auf elementarem Wege leicht y und z. Die zweite Gleichung quadriert und davon den vierfachen Kubus der ersten subtrahiert, kommt

$$y^6 - 2y^3z^3 + z^6 = q^2 + \tfrac{4}{27}p^3,$$

$$\text{woraus } y^3 - z^3 = \sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27}p^3}$$

$$\text{hierzu } \underline{y^3 + z^3 = -q}$$

$$y^3 = -\tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27}p^3}$$

$$z^3 = -\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27}p^3}$$

Es ist mithin, weil $x = y + z$,

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}}.$$

136 a.

Vorstehende sogenannte Cardanische Formel*) bedarf aber noch einer umständlichen Erläuterung. Jede kubische Gleichung hat drei Wurzeln und darunter wenigstens eine reelle (§ 113). Die Cardanische Formel giebt aber scheinbar nur eine Wurzel, denn die entgegengesetzten beiden Werte der Quadratwurzel sind schon berücksichtigt und durch ihre Vorzeichen angedeutet. Da nun aber die Kubikwurzel aus einer Gröſse auch drei verschiedene Werte hat (§ 134a), so ist, wenn man die beiden Gröſsen unter dem Zeichen $\sqrt[3]{\;}$ der Kürze halber mit A und B bezeichnet:

$$x = ((1))^{\frac{1}{3}} . \sqrt[3]{A} + ((1))^{\frac{1}{3}} . \sqrt[3]{B}$$

wo nun $\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[3]{B}$ die gewöhnlichen arithmetischen, die drei Kubikwurzeln aus der Einheit aber nach § 132

$$1 \text{ und } \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \text{ und } \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

*) Im Jahre 1505 von Scipio Ferreo gefunden, von Cardanus später nur veröffentlicht.

oder, wenn man, der Kürze halber, die zweite mit m, also die dritte mit m^2 bezeichnet, weil $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2$

$$1 \text{ und } m \text{ und } m^2$$

sind, so hat man für jede der beiden in der Cardanischen Formel vorkommenden Kubikwurzeln drei verschiedene Werte, nämlich:

$$\sqrt[3]{A}, m\sqrt[3]{A}, m^2\sqrt[3]{A}$$

$$\sqrt[3]{B}, m\sqrt[3]{B}, m^2\sqrt[3]{B}.$$

Da nun die Summe von einem Paar aus beiden Reihen eine Wurzel der Gleichung $x^3+px+q=0$ sein mufs, es hier aber neun verschiedene Paare giebt (§ 20), so scheint jetzt der Segen zu grofs zu werden, indem die Gleichung doch nicht neun, sondern nur drei Wurzeln haben kann. Woran liegt's?

136b.

Es liegt daran, dafs wir die Wurzeln derselben in zwei Teile, y und z, zerlegten und diese Teile durch die beiden neuen Gleichungen:

$$yz = -\frac{p}{3}$$

$$y^3+z^3 = -q$$

bestimmten. Durch diese beiden Bedingungen legen wir aber den beiden Teilen der Wurzel die Eigenschaft bei, dafs ihr Produkt reell $(= -\frac{p}{3})$ und auch die Summe ihrer Kuben reell $(= -q)$ sei. Durch diese eben durch die benutzte Auflösungsmethode durch den ersten Erfinder derselben und ihm selbst wohl unbewufst hinzugefügte und jetzt zu berücksichtigende Bedingung wird die Wahl unter den erwähnten neun Paaren der gefundenen Wurzeln dermafsen eingeschränkt, dafs wirklich nur drei übrig bleiben. Es ist nämlich, wenn wir die drei Wurzeln der Gleichung mit x', x'', x''' bezeichnen,

$$x' = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$
$$x'' = m\sqrt[3]{A} + m^2\sqrt[3]{B}$$
$$x''' = m^2\sqrt[3]{A} + m\sqrt[3]{B}.$$

Da nun $m = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $m^3 = 1, m^6 = (m^3)^2 = 1$, so ist klar, dafs die aufgestellten drei Paar Werte für y, z, und nur diese drei, die erwähnten Bedingungen erfüllen. Setzt man für m und m^2 ihre Werte, so kann man die drei Wurzeln auch so schreiben:

$$x' = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$
$$x'' = -\frac{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}{2} + \frac{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}{2} . \sqrt{-3}$$
$$x''' = -\frac{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}{2} - \frac{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}{2} . \sqrt{-3}.$$

Beispiel 1. Aus der Gleichung

$$x^3 + 6x - 7 = 0$$

folgt nach der Formel

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}},$$

indem hier $p = 6$, $q = -7$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{7}{2} + \sqrt{\tfrac{49}{4} + 8}} + \sqrt[3]{\tfrac{7}{2} - \sqrt{\tfrac{49}{4} + 8}}$$
$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-1}$$

mithin sind die drei Wurzeln (weil hier $A = 8$ und $B = -1$):

$$x' = 2 - 1 = 1,$$
$$x'' = \frac{-1 + 3\sqrt{-3}}{2}$$
$$x''' = \frac{-1 - 3\sqrt{-3}}{2}$$

$$x^3 + 6x - 7 = (x-1)\,(x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\sqrt{-3})\,(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\sqrt{-3}).$$

Beispiel 2. Man hat aus der Gleichung

$$x^3 - 27x + 54 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-27}$$
$$x' = -6,\ x'' = 3,\ x''' = 3$$
$$x^3 - 27x + 54 = (x+6)(x-3)^2.$$

Anmerkung 1. Ist in der Gleichung $x^3 + px + q = 0$, p positiv, so hat, was auch q sein möge, die Gleichung immer zwei imaginäre Wurzeln (§ 127).

Anmerkung 2. Wäre p negativ und $\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27} = 0$, so wäre $A = B = -\frac{1}{2}q$ und die Gleichung hat dann lauter reelle Wurzeln, worunter zwei gleiche:

$$x' = 2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q};\ x'' = -\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q};\ x''' = -\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}.$$

137.

Die Cardanische Formel enthält zwei grosse Unvollkommenheiten.

1. Giebt sie die reelle Wurzel, wenn sie auch rational ist, oftmals unter einer irrationalen Form. So ist z. B. die reelle Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 6x - 40 = 0,$$

wie man leicht sieht, $= 4$. Unsere Formel aber giebt

$$x = \sqrt[3]{(20 + \sqrt{400 - 8})} + \sqrt[3]{(20 - \sqrt{400 - 8})}$$
$$x = 3{,}41421\ldots + 0{,}58578\ldots = 3{,}99999\ldots$$

Man könnte nun freilich durch ein ähnliches Verfahren, durch welches man den Wert von $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ findet (Algebra § 327), auch $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}$ bestimmen. Dies würde hier aber wieder auf eine kubische Gleichung führen, mithin ein logischer Kreis sein.

2. Eine gröfsere Unvollkommenheit der Cardanischen Formel liegt aber noch darin, dafs sie, wenn p negativ und zugleich $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, also auch die Gröfse $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ negativ ist, die Wurzeln unter einer imaginären Form giebt, obgleich doch in

diesem Falle alle drei Wurzeln stets reell sind*). Trotz aller Bemühungen war es bisher nicht gelungen, diese imaginäre Form zu beseitigen, die Gleichung

$$x^3 - px + q = 0 \text{ für } 4p^3 < 27q^2$$

also rein algebraisch aufzulösen, weshalb man diesen Fall den irreduciblen (casus irreducibilis) nannte. Glücklicherweise fand sich für dieselbe eine trigonometrische Auflösung (s. § 138), durch welche man zu allen drei reellen Wurzeln gelangt. Aber auch eine algebraische Auflösung derselben Gleichung ist neuerdings von dem Herausgeber der vorliegenden Auflage (Rich. Schurig) gefunden worden, welche die der Null zunächst liegende Wurzel (x_1) giebt. Setzt man nämlich

$$\sqrt{1 - \frac{27q^2}{4p^3}} = w;\quad m = 0{,}0917234;$$
$$n = 0{,}0242368;\quad (lgn = 8{,}3844752;)$$
$$d = 0{,}5749433;\quad (lgd = 9{,}7596250;)$$
$$r = 1{,}0384386;\quad (lgr = 0{,}0163808;)$$
$$e = 0{,}6041,$$

so ist $$x_1 = \frac{q}{p\,[m + nw + d\,(1 + rw)^e]}.$$

Beispiel. $x^3 - 7x + 6 = 0$. (Vergl. das Beispiel in § 138.)

$$w = \sqrt{1 - \frac{27 \cdot 6^2}{4 \cdot 7^3}} = \frac{\sqrt{700}}{49}\ (= 0{,}5395207).$$
$$lgw = 9{,}7323529;$$
$$lgr = 0{,}0163808$$
$$lg\,(rw) = 9{,}7487337;\qquad rw = 0{,}560704;$$

---

*) Man denke sich die Gleichung $x^3 - px + q = 0$ konstruiert, so erhält man für $x = 0$ eine positive Ordinate. Für $x = \sqrt{\frac{p}{3}}$ kommt:

$$\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} - p\sqrt{\frac{p}{3}} + q = -\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} + q$$

also eine negative Ordinate, denn weil nach Voraussetzung $\frac{4p^3}{27} > q^2$, so ist offenbar auch $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} > q$. Für $x = \sqrt{p}$ hat man $p^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} + q$, mithin wieder eine positive Ordinate. Die Gleichung $x^3 - px + q = 0$ hat also wirklich drei reelle Wurzeln, zwei positive, zwischen 0 und $\sqrt{\frac{p}{3}}$ und zwischen $\sqrt{\frac{p}{3}}$ und $\sqrt{p}$, und eine negative nach § 113. Dasselbe gilt von der Gleichung $x^3 - px - q = 0$, welche nach § 122 die entgegengesetzten Wurzeln von $x^3 - px + q = 0$, also eine positive und zwei negative Wurzeln hat.

$$elg\ (1+rw) = 0{,}6041 \,.\, 0{,}1933205 = 0{,}1167849$$
$$lg\, d = 9{,}7596250$$
$$lg\, d(\ldots)^e = 9{,}8764099$$
$$d(\ldots)^e = 0{,}7523326; \qquad lg\, w = 9{,}7323529$$
$$lg\, n = 8{,}3844752$$
$$lg\,(nw) = 8{,}1168281$$
$$nw = 0{,}0130867.$$

$$x_1 = \frac{6}{7\,[0{,}0917234 + 0{,}0130867 + 0{,}7523326]} = 1.$$

Diese Auflösung ist noch insofern äufserst merkwürdig, als sie mit dem negativ genommenen w auch sehr nahe die dem Zeichen nach mit x_1 übereinstimmende Wurzel (x_2) giebt, sobald sich w mehr von 1 ab- und 0 zuwendet. Für vorstehendes Beispiel giebt das negative w:

$$x_2 = \frac{6}{7\,[m - 0{,}0130867 + d\,(1 - 0{,}560704)^e]}.$$

$$elg\,(1 - 0{,}560704) = elg\, 0{,}439296 = e\,(9{,}6427572 - 10)$$
$$= 0{,}6041\,(-0{,}3572428) = -0{,}2158104, \text{ oder}$$
$$lg\, 0{,}439296^e = 9{,}7841896$$
$$lg\, d = 9{,}7596250$$
$$n\, lg\, 9{,}5438146 = 0{,}3497958.$$

$$x_2 = \frac{6}{7\,[0{,}0917234 - 0{,}0130867 + 0{,}3497958]} = 2{,}000648.$$

(Statt $x_2 = 2$.)

Der Autor dieser Auflösung hat übrigens die gegründete Hoffnung, eine Formel zu finden, welche die drei reellen Wurzeln zugleich giebt.

138.

Trigonometrische Auflösung des casus irreducibilis, also der Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

für den Fall, dafs $4p^3 > 27\,q^2$ ist.

Für diese Gleichung hat die Cardanische Formel die Form

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Setzen wir hier

$$-\frac{q}{2}=\varrho\cos\varphi \qquad \text{mithin } \frac{q^2}{4}=\varrho^2\cos^2\varphi,$$

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}}=\varrho\sin\varphi \qquad \frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}=\varrho^2\sin^2\varphi,$$

$$\text{hieraus: } \varrho=\sqrt{\frac{p^3}{27}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\cos\varphi=\frac{-\frac{q}{2}}{\varrho} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x=\sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}+\sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi-i\sin\varphi)}\ ^{*)}$$

$$x=\varrho^{\frac{1}{3}}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\frac{1}{3}}+\varrho^{\frac{1}{3}}(\cos\varphi-i\sin\varphi)^{\frac{1}{3}}$$

$$x=\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)+\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}\right) \ (\S\ 88)$$

$$x=2\varrho^{\frac{1}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Man bestimme also erst den Modulus ϱ aus (1), dann φ aus (2), indem man zu dem Winkel, welchen die Tafeln geben, $2k\pi$ hinzufügt, alsdann $k=0$, 1, 2 setzt, so giebt die Formel (3) drei und nur drei verschiedene Werte für x, nämlich

$$x'=2\varrho^{\frac{1}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3};\ x''=2\varrho^{\frac{1}{3}}\cdot\cos\frac{2\pi+\varphi}{3};\ x'''=2\varrho^{\frac{1}{3}}\cdot\cos\frac{4\pi+\varphi}{3};$$

denn wollte man auch noch $k=3$, 4...... setzen, so würden doch die drei verschiedenen Cosinus in den letzteren Ausdrücken in derselben Ordnung wiederkehren. Setzt man z. B. in $\cos\frac{2k\pi+\varphi}{3}$, $k=3$, so ist $\cos\left(2\pi+\frac{\varphi}{3}\right)=\cos\frac{\varphi}{3}$, also dasselbe wie für $k=0$; setzt man $k=4$, so ist $\cos\left(2\pi+\frac{2\pi+\varphi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi+\varphi}{3}$ dasselbe wie für $k=1$ &c.

Beispiel. Ist die Gleichung:

$$x^3-7x+6=0$$

gegeben, so ist $p=-7$, $q=+6$ und $\frac{p^3}{27}>\frac{1}{4}q^2$, mithin

*) Wenn nämlich: $\sqrt{\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}}=\varrho\sin\varphi$, so ist $\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=\varrho\sin\varphi\cdot\sqrt{-1}$.

$$\varrho = \sqrt{\frac{7^3}{27}}; \qquad \cos\varphi = -\frac{3}{\varrho}$$

$$\begin{aligned}
\log 7^3 &= 2{,}5352940 \\
\log 27 &= 1{,}4313638 \\
&\ 1{,}1039302 \\
&2) \\
\log \varrho &= 0{,}5519651 \\
\log \varrho^{\frac{1}{3}} &= 0{,}1839884
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log 3 &= 0{,}4771213\,(n) \\
\log \varrho &= 0{,}5519651 \\
\cos\varphi &= 9{,}9251562\,(n) \\
\varphi &= 147^0\,19'\,11'',4
\end{aligned}$$

$\frac{\varphi}{3} = 49^0 6' 23'',8$	$\frac{2\pi+\varphi}{3} = 169^0 6' 23'',8$	$\frac{4\pi+\varphi}{3} = 289^0 6' 23'',8$
$x' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cdot \cos\frac{\varphi}{3}$	$x'' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cdot \cos\frac{2\pi+\varphi}{3}$	$x''' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cdot \cos\frac{4\pi+\varphi}{3}$
$\log\cos\frac{\varphi}{3} = 9{,}8160116$	$\log\cos\frac{2\pi+\varphi}{3} = 9{,}9921028(n)$	$\log\cos\frac{4\pi+\varphi}{3} = 9{,}5149817$
$\log \varrho^{\frac{1}{3}} = 0{,}1839884$	$\log 2\varrho^{\frac{1}{3}} = 0{,}4850184$	$\log 2\varrho^{\frac{1}{3}} = 0{,}4850184$
$\log 2 = 0{,}3010300$	$\log x'' = 0{,}4771212(n)$	$\log x''' = 0{,}0000001$
$\log x' = 0{,}3010300$	$x'' = -3$	$x''' = 1$
$x' = 2$		

II. Sechs neue Auflösungen der Gleichung 4. Grades

von Rich. Schurig.

139.

1. Auflösung. Nach § 120 kann

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

als gegeben betrachtet werden. Dividiert man diese Gleichung durch $x^2 + nx + p$, so erhält man

$$x^2 - nx + a + n^2 - p + \frac{(b + 2np - an - n^3)x + c + p^2 - ap - n^2p}{x^2 + nx + p} = 0.$$

Soll nun (s. 8. Buch) der Divisor $x^2 + nx + p = 0$ zwei Auflösungen der gegebenen Gleichung enthalten, so mufs der Rest, d. i. der vorstehende gebrochene Teil des Quotient $=0$, oder

$$b + 2np - an - n^3 = 0 \ldots\ldots \text{(I)}$$
$$c + p^2 - ap - n^2p = 0 \ldots\ldots. \text{(II)}$$

sein und die ganze Funktion des Quotient oder

$$x^2 - nx + a + n^2 - p = 0 \ldots.. \qquad \text{(III)}$$

wird dann die beiden noch fehlenden Wurzeln einschliefsen. Um die Gleichungen I und II nach n aufzulösen, kann man zunächst aus I

$$p=\frac{a+n^2}{2}-\frac{b}{2n}\dots\dots \qquad \text{(IV)}$$

bestimmen und in II substituieren. Setzt man hierauf $n^2=r$, so ergiebt sich

$$r^3+2ar^2+(a^2-4c)r-b^2=0.$$

Ist hier r bestimmt, so findet sich $n=\sqrt{r}$ und aus IV:

$$p=\frac{a+r}{2}-\frac{b}{2\sqrt{r}}.$$

Die Gleichung $x^2+nx+p=0$ giebt nun die folgenden 2 Wurzeln der Gleichung 4. Grades

$$x=-\frac{n}{2}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4}-p} \text{ d. i.}$$

$$x=-\frac{\sqrt{r}}{2}\pm\sqrt{\frac{b}{2\sqrt{r}}-\frac{a}{2}-\frac{r}{4}}\dots\dots \qquad \text{(V)}$$

Die andere Gleichung

$$x^2-nx+a+n^2-p=0$$

führt zu den noch fehlenden Wurzeln, die mit V übereinstimmen, wenn daselbst $\sqrt{r}$ negativ genommen wird, was auch wegen $n=\pm\sqrt{r}$ zu erwarten stand. Die ganze Auflösung reduziert sich somit auf folgende Ausdrücke

$$r^3+2ar^2+(a^2-4c)r-b^2=0\dots\dots \qquad \text{(A)}$$

Es genügt, für r die positive Wurzel (s. § 113) allein zu nehmen*).

$$x^{I} \text{ und } x^{II}=-\frac{\sqrt{r}}{2}\pm\sqrt{\frac{b}{2\sqrt{r}}-\frac{a}{2}-\frac{r}{4}}\dots\dots\dots \qquad \text{(B)}$$

$$x^{III} \text{ und } x^{IV}=\frac{\sqrt{r}}{2}\pm\sqrt{-\frac{b}{2\sqrt{r}}-\frac{a}{2}-\frac{r}{4}}\dots \qquad \text{(C)}$$

Beispiel. $x^4-35x^2-140x-50=0.$

Mit $a=-35$, $b=-140$, $c=-50$ wird A:

$$r^3-70r^2+1425r-19600=0$$

$$r=49{,}11033 \text{ und } \sqrt{r}=7{,}00788.$$

---

*) Setzt man $r=u-\frac{2a}{3}$, so ist

$$u^3-\left(\frac{a^2}{3}+4c\right)u-\frac{2a^3}{27}+\frac{8ac}{3}-b^2=0.$$

Aus B: $x = -3{,}50394 \pm \sqrt{-\frac{70}{\sqrt{r}} + 17{,}5 - 12{,}27758}$

d. i. $x = -3{,}50394 \pm \sqrt{-9{,}98876 + 5{,}22242}$

oder x^{I} und $x^{II} = -3{,}50394 \pm 2{,}183196\, i$.

Aus C: $x = 3{,}50394 \pm \sqrt{9{,}98876 + 5{,}22242}$,

oder $x^{III} = 7{,}404090$

$x^{IV} = -0{,}396214$.

2. Auflösung. Bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ mit x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV} und setzt

$$x^{I} + x^{II} = u,\quad x^{III} + x^{IV} = v,$$
$$x^{I} x^{II} = w,\quad x^{III} x^{IV} = z, \text{ so ist}$$
$$-x^{I} - x^{II} - x^{III} - x^{IV} = 0 \text{ oder I. } -u - v = 0.$$
$$x^{I} x^{II} + x^{I} x^{III} + \ldots\ldots = a \text{ oder II. } w + uv + z = a.$$
$$-(x^{I} x^{II} x^{III} + x^{I} x^{II} x^{IV} + \ldots) = b \text{ oder III. } vw + uz = -b.$$

Endlich $x^{I} x^{II} x^{III} x^{IV} = c$ oder IV. $wz = c$.

Aus I: $v = -u$, aus IV: $z = \frac{c}{w}$ giebt in II und III:

$$w + \frac{c}{w} = a + u^2 \text{ und } w - \frac{c}{w} = \frac{b}{u} \ldots\ldots (Y)$$

Quadriert man beide Gleichungen und subtrahiert sie alsdann, so erhält man

$$u^6 + 2au^4 + (a^2 - 4c)\, u^2 - b^2 = 0.$$

Ist hier u gefunden, so ergiebt sich aus Y: w und aus beiden x^{I} und x^{II} u. s. w.

3. Auflösung. Setzt man die Gleichung

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

identisch mit $(x^2 + r)^2 = m(x + n)^2$ d. i.

$$x^4 + (2r - m)\, x^2 - 2mnx + r^2 - mn^2 = 0,$$

so ist

$$2r - m = a,\quad -2mn = b,\quad r^2 - mn^2 = c.$$

Mit $r = \frac{a+m}{2}$ und $n = -\frac{b}{2m}$ ergiebt sich aus der letzten Gleichung

$$\left(\frac{a+m}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4m} = c \text{ oder}$$

$$m^3 + 2am^2 + (a^2 - 4c)\, m - b^2 = 0.$$

Mit m ist nun auch r und n bekannt, und

$$x^2+r=\pm\sqrt{m}\,.(x+n)$$

enthält die vier gesuchten Wurzeln.

Anmerkung. Addiert man zu der gegebenen Gleichung

$$\begin{array}{r} x^4+ax^2+c=-bx: \\ mx^2+n=mx^2+n \\ \hline x^4+(a+m)x^2+c+n=mx^2-bx+n \end{array}$$

und setzt diese Gleichung identisch mit

$$\left(x^2+\frac{a+m}{2}\right)^2=(\sqrt{m}\,.x-\sqrt{n})^2,$$

so erhält man eine Auflösung, die mit der vorstehenden 3. vollkommen übereinstimmt.

4. Auflösung. Setze $x=r(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$,
$x=p(\cos\psi\pm i\sin\psi)$.

Vergleicht man das Produkt dieser vier annullierten Gleichungen mit der gegebenen $x^4+ax^2+bx+c=0$, so ist

$$r\cos\varphi+p\cos\psi=0$$
$$p^2+r^2+4pr\cos\varphi\cos\psi=a$$
$$2pr(r\cos\psi+p\cos\varphi)=-b$$
$$(pr)^2=c.$$

Aus der 1. und 3. Gleichung findet man

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi=-\dfrac{b}{2r(p^2-r^2)} \\[2ex] \cos\psi=\dfrac{b}{2p(p^2-r^2)} \end{array}\right\}\ldots(A)$$

und damit aus der 2. Gleichung

$$p^2+r^2-\frac{b^2}{p^4-2p^2r^2+r^4}=a\ldots\ldots(B)$$

$$p^2+r^2=z\ldots\ldots\ldots(C)$$

gesetzt, giebt mit $p^2r^2=c$:

$$z-\frac{b^2}{z^2-4c}=a,\text{ oder}$$

$$z^3-az^2-4cz+4ac-b^2=0.$$

Ist hier $z=p^2+r^2$ gefunden, so wird B:

$$z-\frac{b^2}{(p^2-r^2)^2}=a,\text{ daher}$$

$$p^2-r^2=\frac{b}{\sqrt{z-a}}\ldots\ldots(D)$$

C+D und C—D führen zu p und r, A alsdann zu cos φ und cos ψ u. s. w.

5. Auflösung. Diese bezieht sich auf die vollständige Gleichung

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

und macht daher das oft beschwerliche Beseitigen des Gliedes x^3 unnötig.

Es seien die vier Wurzeln $m+n$, $m-n$, $p+q$, $p-q$. Das Produkt der anullierten Wurzelgleichungen ($x-m-n=0$ u. s. w.) mit der gegebenen verglichen:

$$a=-2(m+p)\ldots\ldots(\mathrm{I})$$
$$b=m^2-n^2+p^2-q^2+4mp\ldots\ldots(\mathrm{II})$$
$$c=-2p\,(m^2-n^2)-2m\,(p^2-q^2)\ldots\ldots(\mathrm{III})$$
$$d=(m^2-n^2)\,(p^2-q^2)\ldots\ldots(\mathrm{IV}).$$

Setzt man $m^2-n^2=u\ldots\ldots(\mathrm{V})$

so erhält man aus IV: $p^2-q^2=\frac{d}{u}\ldots\ldots(\mathrm{VI})$

und aus I: $p=-\frac{a}{2}-m\ldots\ldots(\mathrm{VII})$

Mit diesen Ausdrücken findet sich aus II und III:

$$b=u+\frac{d}{u}-4m\left(\frac{a}{2}+m\right)\ldots\ldots(\mathrm{VIII})$$

und $c=au+2mu-\frac{2dm}{u}\ldots\ldots(\mathrm{IX})$

Substituiert man den für m aus der letzten Gleichung gefundenen Ausdruck in VIII, so ergiebt sich, wenn noch

$$u+\frac{d}{u}=y\ldots\ldots(\mathrm{X})$$

gesetzt wird:

$$y^3-by^2+(ac-4d)y+d(4b-a^2)-c^2=0\,^{*)}\ldots\ldots(\mathrm{A})$$

Mit dem reellen y, dessen Quadrat $\geqq 4d$, folgt nun aus X:

$$u=\frac{y+\sqrt{y^2-4d}}{2}$$

---

*) $y=r+\frac{b}{3}$ gesetzt, giebt

$$r^3+\left(ac-4d-\frac{b^2}{3}\right)r+\frac{b}{3}(8d+ac)-\frac{2b^3}{27}-a^2d-c^2=0.$$

und da Gleichung VIII auch

$b = y - 4m\left(\frac{a}{2} + m\right)$ geschrieben werden kann, so ist

$$m = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4(y-b)}}{4}$$

oder auch $m = \frac{c - au}{2(2u - y)}$ (s. IX und X).

Aus VII folgt $p = -\frac{a}{2} - m$,

aus V: $n = \sqrt{m^2 - u}$.

$\frac{d}{u} = y - u$ (siehe X) giebt aus VI:

$$q = \sqrt{u - y + p^2}.$$

Die Gleichung 4. Grades ist mithin mit A und den darauf folgenden für u, m, n, p und q erhaltenen Ausdrücken gelöst; denn $x = m + n$ u. s. w. (s. ob.).

6. Auflösung. Die Gleichung $x^4 + ax + b = 0$ läſst eine ziemlich einfache Auflösung zu.

Setze $x^2 = mx + n$ .... (A)

folglich $x^4 = m^2x^2 + 2mnx + n^2$ d. i.

$x^4 = m^2(mx + n) + 2mnx + n^2$ oder

$x^4 - (m^3 + 2mn)x - m^2n - n^2 = 0$.

Diese Gleichung mit der gegebenen verglichen führt zu m und n, und mit A zur Auflösung; denn aus

$$a = -m^3 - 2mn \text{ und } b = -m^2n - n^2$$

findet man $n = -\frac{m^2}{2} - \frac{a}{2m}$ und $m^6 - 4bm^2 - a^2 = 0$;

$m^2 = z$ giebt I. $z^3 - 4bz - a^2 = 0$.

Da nun $m = \sqrt{z}$, $n = -\frac{z}{2} - \frac{a}{2\sqrt{z}}$, so geht

A über in II. $x^2 = \sqrt{z} \cdot x - \frac{z}{2} - \frac{a}{2\sqrt{z}}$.

Mit I und II ist die gegebene Gleichung aufgelöst und zwar giebt $\sqrt{z}$ positiv genommen das eine Paar der Wurzeln, $\sqrt{z}$ negativ genommen das andere Paar.

Elftes Buch.

Zerlegung rational gebrochener Funktionen in Brüche, deren Zähler konstant und deren Nenner Formen ersten Grades sind.

140.

Nach den Regeln der Buchstabenrechnung lassen sich mehrere gebrochene Funktionen leicht auf einerlei Nenner bringen und in eine einzige gebrochene Funktion vereinigen. So ist z. B.:

$$\frac{5}{x-3}+\frac{2}{x+6}=\frac{5(x+6)+2(x-3)}{(x-3)(x+6)}=\frac{7x+24}{x^2+3x-18} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{5}{x-2}+\frac{x}{x+6}=\frac{x^2+3x+30}{x^2+4x-12} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{3}{(x-2)^3}+\frac{1}{x+2}=\frac{x^3-6x^2+15x-2}{x^4-4x^3+16x-16} \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+12}+\frac{5}{x+3}=\frac{7x^2-13x+63}{x^3-x^2+36} \quad \ldots\ldots (4)$$

und es ist klar, dafs, wenn die einzelnen Brüche echt gebrochene rationale Funktionen sind (§ 34), dann auch ihre Vereinigung eine echt gebrochene Funktion giebt. Man kommt nun leicht auf den Gedanken, auch umgekehrt eine gebrochene Funktion, deren Nenner nicht eine Form ersten Grades (und auch keine Potenz davon) ist, als aus einfachern Brüchen zusammengesetzt und deshalb in solche zerlegbar zu betrachten, und weil diese Zerlegung besonders für die Integralrechnung von grofser Wichtigkeit ist, eine sichere Methode zu erfinden, nach welcher dieselbe bewirkt werden kann.

141.

Wir können hierbei nun immer annehmen, dafs die gebrochene Funktion, welche in einfachere zerlegt werden soll, eine echt gebrochene ist, denn wäre sie es nicht, wie z. B.: $\frac{x^3+8x^2+4x-66}{x^2+3x-18}$, so könnte man, wie nachstehend angedeutet, durch Partialdivision die darin enthaltenen Ganzen erst herausziehen. Man erhält dann aufser dieser ganzen noch eine echt gebrochene Funktion, deren Zähler einfacher ist. Es ist nämlich

$$\frac{x^3+8x^2+4x-66}{x^2+3x-18}=x+5+\frac{7x+24}{x^2+3x-18}.$$

Ebenso $\frac{x^2-2x-5}{x^2-4x-6}=1+\frac{2x+1}{x^2-4x-6}.$

Auch können wir annehmen, dafs in der echt gebrochenen Funktion Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, weil man ihn sonst weglassen könnte. So ist z. B

$$\frac{2x+4}{(x+5)\,(x-6)\,(x+2)}=\frac{2}{(x+5)\,(x-6)}.$$

142.

Um nun eine echt gebrochene Funktion, z. B. $\frac{7x+24}{x^2+3x-18}$ in einfachere Brüche zu zerlegen, mufs offenbar zuerst daran gedacht werden, den Nenner in Faktoren aufzulösen, weil dieser ja als das Produkt aus den Nennern der zu findenden einfachern Brüche betrachtet werden mufs. Könnte man den Nenner in lauter einfache und ungleiche Faktoren auflösen (was aber von der noch erst zu erfindenden Auflösung aller höhern Gleichungen abhängt), so könnte man offenbar diese einfachen Faktoren als die Nenner der zu findenden einfachern Brüche ansehen, deren Zähler dann offenbar konstant sein müssen, weil, wie § 140, Beispiel 2 zeigt, wenn auch nur einer der Zähler die veränderliche Gröfse enthielte, die Vereinigung der Brüche die echt gebrochene Funktion nicht wiedergeben könnte.

Als die natürlichste Methode, diese fraglichen konstanten Zähler zu bestimmen, dringt sich hier ganz von selber die zuerst von Leibnitz angewandte Methode der unbestimmten Koeffizienten auf, d. h. wir fingieren sie vorläufig. Für die gebrochene Funktion $\frac{7x+24}{x^2+3x-18}$ z. E. hat man zuerst aus $x^2+3x-18=0$, $x=\frac{-3\pm 9}{2}$, $=3$, $=-6$. Es ist mithin (s. § 103 bis § 107)

$$x^2+3x-18=(x-3)(x+6).$$

Setzen wir also:

$$\frac{7x+24}{x^2+3x-18}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+6}$$

und bringen beide Brüche auf einerlei Benennung, so kommt

$$\frac{7x+24}{x^2+3x-18}=\frac{(A+B)x+(6A-3B)}{x^2+3x-18}.$$

Da nun für jeden Wert von x die rechte Seite dieser Gleichung dasselbe geben mufs, wie die linke, die Nenner aber gleich sind, so mufs auch für jeden Wert von x:

$$7x+24=(A+B)x+(6A-3B)$$

sein. Dies giebt uns zur Bestimmung der fraglichen Zähler A und B nach § 64 die beiden Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{r}A+B=7\\ 6A-3B=24\end{array}\right\}\text{ woraus }\begin{array}{l}A=5,\\ B=2.\end{array}$$

Es ist mithin

$$\frac{7x+24}{x^2+3x-18}=\frac{5}{x-3}+\frac{2}{x+6}.$$

Ebenso ist

$$\frac{7x}{x^2+3x-18}=\frac{\frac{7}{3}}{x-3}+\frac{\frac{14}{3}}{x+6}=\frac{7}{3x-9}+\frac{14}{3x+18}.$$

Ferner ist

$$\frac{24}{x^2+3x-18}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+6}=\tfrac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+6}\right).$$

143.

Weil man bei dem eben gezeigten Verfahren immer so viele Bedingungsgleichungen ersten Grades erhält, als konstante Zähler gesucht werden, so ist klar, dafs letztere dadurch vollkommen bestimmt sind, mithin nicht verschiedene Zerlegungen stattfinden können. Bei dieser Methode lassen sich manchmal kleine Rechnungsvorteile benutzen. Man hat z. B.

$$\frac{7x+24}{(x+6)(x-3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+6} \ldots\ldots\ldots (1)$$

Um den Zähler A zu finden, multipliziere man die ganze Gleichung mit $x-3$, so kommt

$$\frac{7x+24}{x+6} = A + \frac{B(x-3)}{x+6} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Da nun die Gleichung (2) für jeden Wert von x gelten mufs, so setze man beiderseits $x=3$, so hat man

$$\frac{21+24}{3+6} = A = 5.$$

Um B zu erhalten, multipliziere man die Gleichung (1) mit $x+6$, so kommt

$$\frac{7x+24}{x-3} = \frac{A(x+6)}{x-3} + B,$$

setzt man beiderseits $x=-6$, so hat man

$$\frac{-42+24}{-6-3} = B = 2.$$

144.

Aufgabe. Den Bruch: $\frac{4x^2+8x+30}{x^3+2x^2-21x+18}$ zu zerlegen.

Auflösung. Die kubische Gleichung $x^3+2x^2-21x+18=0$ hat die drei reellen Wurzeln 1, 3, -6. Es ist demnach

$$\frac{4x^2+8x+30}{(x-1)(x-3)(x+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+6} \ldots\ldots (1)$$

Multipliziere mit $x-1$ und setze dann $x=1$, so kommt

$$\frac{4+8+30}{-2.7}=\mathrm{A}=-3.$$

Ebenso findet man B=5, C=2. Es ist mithin

$$\frac{4x^2+8x+30}{x^3+2x^2-21x+18}=\frac{2}{x+6}+\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-1}.$$

Ebenso findet man

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{\mathrm{A}}{x-a}+\frac{\mathrm{B}}{x+a}=\frac{\frac{1}{2a}}{x-a}-\frac{\frac{1}{2a}}{x+a}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right];$$

$$\frac{2}{a^2-x^2}=\frac{\mathrm{A}}{a+x}+\frac{\mathrm{B}}{a-x}=\frac{\frac{1}{a}}{a+x}+\frac{\frac{1}{a}}{a-x}=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right].$$

145.

Enthält der Nenner der gebrochenen Funktion mehrere oder lauter gleiche Faktoren, wie z. B. $\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}$, so kann man einen solchen Bruch offenbar nicht aus $\frac{\mathrm{A}}{x-2}+\frac{\mathrm{B}}{x-2}+\frac{\mathrm{C}}{x-2}$ entstanden denken. Einer der drei Nenner wenigstens mufs $(x-2)^3$ sein. Da nun aber aufser diesem auch noch einer der Nenner $(x-2)^2$ und $x-2$ oder beide vorhanden sein können, so setze man

$$\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}=\frac{\mathrm{A}}{(x-2)^3}+\frac{\mathrm{B}}{(x-2)^2}+\frac{\mathrm{C}}{x-2}.$$

Mit dem allgemeinen Nenner multipliziert, kommt

$$x^2+3x-4=\mathrm{C}x^2+(\mathrm{B}-4\mathrm{C})x+(\mathrm{A}-2\mathrm{B}+4\mathrm{C})$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{C}&=1\\ \mathrm{B}-4\mathrm{C}&=3\\ \mathrm{A}-2\mathrm{B}+4\mathrm{C}&=-4\end{aligned}\right\}\text{ woraus }\begin{aligned}\mathrm{C}&=1,\\ \mathrm{B}&=7,\\ \mathrm{A}&=6,\end{aligned}$$

mithin ist: $$\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}=\frac{6}{(x-2)^3}+\frac{7}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}.$$

Anmerkung. In solchem Falle, wie hier, kann man auch folgendermafsen verfahren:

Man setze in $\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}$, $x-2=u$, folglich $x=u+2$, so wird

$$\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}=\frac{(u+2)^2+3(u+2)-4}{u^3}=\frac{u^2+7u+6}{u^3}=\frac{1}{u}+\frac{7}{u^2}+\frac{6}{u^3}$$

und, wenn man statt u wieder $x-2$ setzt,

$$\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}=\frac{1}{x-2}+\frac{7}{(x-2)^2}+\frac{6}{(x-2)^3}.$$

146.

Aufgabe. Den Bruch $\frac{x^3-6x^2+15x-2}{(x-2)^3(x+2)}$ zu zerlegen.

Auflösung. Man setze

$$\frac{x^3-6x^2+15x-2}{(x-2)^3(x+2)}=\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}.$$

Multipliziert man mit dem allgemeinen Nenner, so kommt:

$$x^3-6x^2+15x-2=\begin{array}{r|r|r|r} D & x^3-6D & x^2+12D & x-8D \\ C & -2C & -\;4C & +8C \\ & +\;B & +\;\;A & -4B \\ & & & +2A \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} C+D=1 \\ B-2C-6D=-6 \\ A-4C+12D=15 \\ 2A-4B+8C-8D=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{hieraus} \\ \left(\begin{array}{c}\text{Algebra} \\ \S\ 160-163\end{array}\right): \end{array} \begin{array}{l} D=1, \\ C=0, \\ B=0, \\ A=3, \end{array}$$

mithin ist $\frac{x^3-6x^2+15x-2}{(x-2)^3(x+2)}=\frac{3}{(x-2)^3}+\frac{1}{x+2}$.

147.

Sind mehrere oder alle einfachen Faktoren des Nenners der gebrochenen Funktion imaginär, so könnte man auf dieselbe Weise wie vorhin verfahren und z. B.:

$$\frac{7x^2-25x+62}{(x-3)(x-2+3i)(x-2-3i)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2+3i}+\frac{C}{x-2-3i}$$

setzen. Man erhält aber für den eigentlichen Zweck dieser Zerlegung (nämlich für die Integralrechnung) leichtere Rechnung, wenn man die imaginären Nenner und Zähler der Teilbrüche vermeidet. Dies kann dadurch geschehen, indem man Teilbrüche mit solchen Nennern vom zweiten Grade fingiert, welche das Produkt aus zwei gepaarten imaginären Faktoren sind. Da man dann aber nicht verlangen kann, dafs der Zähler eines solchen Teilbruchs jedesmal konstant ist, indem er eine Form ersten Grades sein kann (eine Vorstellung, worauf das Beispiel 4, § 140 führt), so setzen wir für jeden dieser Nenner vom zweiten Grade (sowie auch für Potenzen desselben) eine Form ersten Grades als Zähler an, z. B.

$$\frac{7x^2-25x+62}{(x-3)\,(x^2-4x+13)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+13}.$$

Jetzt mit dem allgemeinen Nenner multipliziert, kommt

$$7x^2-25x+62=(A+B)\,x^2-(4A+3B-C)\,x+13A-3C$$

$$\left.\begin{aligned}A+B&=7\\ 4A+3B-C&=25\\ 13A-3C&=62\end{aligned}\right\}\text{ hieraus }\left\{\begin{aligned}A&=5\\ B&=2\\ C&=1\end{aligned}\right.$$

mithin ist: $$\frac{7x^2-25x+62}{(x-3)\,(x^2-4x+13)}=\frac{5}{x-3}+\frac{2x+1}{x^2-4x+13}.$$

48.

Aufgaben. Folgende Brüche zu zerlegen:

$$\frac{4x^2-x+6}{(1+2x^2)^2},\qquad \frac{1}{x^2\,(x^2+1)^2},\qquad \frac{1}{x^3-1}.$$

Auflösungen. Man hat

$$1)\ \frac{4x^2-x+6}{(1+2x^2)^2}=\frac{Ax+B}{(1+2x^2)^2}+\frac{Cx+D}{1+2x^2},$$

$$\frac{4x^2-x+6}{(1+2x^2)^2}=\frac{4-x}{(1+2x^2)^2}+\frac{2}{1+2x^2};$$

$$2)\ \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1},$$

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{x^2+1};$$

$$3)\ \frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\ (\S\ 132),$$

$$\frac{1}{x^3-1}=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

In der Differentialrechnung wird noch eine andere Zerlegungsmethode gezeigt, welche besonders auf Brüche, wie der letztere, anwendbar ist.

Zwölftes Buch.

Von den Kettenbrüchen.

149.

Erklärung. Unter einem Kettenbruch versteht man einen Gröſsenausdruck in folgender Form:

$$y_0+\cfrac{1}{y_1+\cfrac{1}{y_2+\cfrac{1}{y_3+\cfrac{1}{y_4+\cfrac{1}{y_5+\cfrac{1}{y_6}}}}}}\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

nämlich eine ganze Zahl, y_0 (wo y_0 aber auch 0 sein kann), plus einem Bruche, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine ganze Zahl plus einem Bruche, dessen Zähler wieder 1 ist &c. Die ganzen Zahlen y_0, y_1, y_2, $y_3 \ldots$ heiſsen die Glieder des Kettenbruchs. Brounker soll zuerst auf diese Bruchform verfallen sein, indem er, um die Zahl $\frac{\pi}{4}$ zu berechnen, dafür den Ausdruck

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+}}}}\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

aufstellte*). Euler jedoch ist der erste gewesen, welcher die

*) Man erhält diese Form, indem man die Reihe $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\ldots\ldots$ in einen Kettenbruch verwandelt.

Kettenbrüche einer näheren Betrachtung unterworfen hat und zwar in der zuerst angegebenen Form (wo nämlich der Zähler immer 1 ist), auf welche jeder andere Kettenbruch immer gebracht werden kann.

Die Kettenbrüche bieten so viele merkwürdige Eigenschaften dar und lassen so mancherlei Anwendungen zu, daſs eine vollständige Theorie derselben einen ganzen Band füllen würde.

150.

Es ist leicht, einen gewöhnlichen echten oder unechten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln. Ist der Bruch echt, so dividiere man Zähler und Nenner durch den Zähler; den im Nenner entstehenden Bruch ebenso behandelt &c., bis der letzte Zähler 1 wird. Ist der Bruch unecht, so stelle man erst die ganze Zahl heraus. Es ist z. B.

$$\frac{17}{74}=\frac{1}{4+\frac{6}{17}}=\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{5}{6}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}}$$

$$\frac{74}{17}=4+\frac{6}{17}=4+\frac{1}{2+\frac{5}{6}}=4+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}$$

Umgekehrt würde man ohne weitere Regel aus einem Kettenbruch den erzeugenden Bruch finden können. Es ist z. B.

$$\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{6}{5}}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{5}{6}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{17}{6}}}=\frac{1}{4+\frac{6}{17}}=\frac{17}{74}$$

151.

Beide vorhergehenden Rechnungen, um einen Bruch in einen Kettenbruch und umgekehrt zu verwandeln, lassen sich aber bedeutend abkürzen.

Um erstlich gewöhnliche Brüche in Kettenbrüche zu verwandeln, z. B. $\frac{17}{74}$, $\frac{74}{17}$, $\frac{972}{1393}$, verfahre man mit jedes Bruches

Nenner und Zähler, als wenn man ihren gröfsten gemeinschaftlichen Faktor suchen wollte (Algebra § 29), so sind die Quotienten die Glieder des Kettenbruchs. Die Richtigkeit folgt aus der Rechnung in § 150, z. B. für $\frac{17}{74}$:

$$\begin{array}{l} 17:74=0 \\ 74:17=4 \\ 17:6=2 \\ 6:5=1 \\ 5:1=1 \end{array}$$

oder abgekürzt: $17 \underset{0}{:} 74 \underset{4}{:} 17 \underset{2}{:} 6 \underset{1}{:} 5 \underset{5}{:} 1$

(die Quotienten 0, 4, 2, 1, 5 stehen über den Zeichen)

mithin ist: $\frac{17}{74}=0+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}$

Für $\frac{74}{17}$: $74 \underset{4}{:} 17 \underset{2}{:} 6 \underset{1}{:} 5 \underset{5}{:} 1$

mithin: $\frac{74}{17}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}$

Für $\frac{972}{1393}$: $972 \underset{0}{:} 1393 \underset{1}{:} 972 \underset{2}{:} 421 \underset{3}{:} 130 \underset{4}{:} 31 \underset{5}{:} 6 \underset{6}{:} 1$

mithin: $\frac{972}{1393}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}}}$

152.

Um nun auch ein allgemeines Gesetz zu finden, nach welchem man bequemer, als der unmittelbare Gedanke § 150 es angiebt, einen Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, wollen wir, die allgemeine Bezeichnung beibehaltend, statt vom letzten Gliede nach und nach zum ersten zurückzugehen, umgekehrt verfahren. Es sei also der Kettenbruch allgemein

$$y_0 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{y_3 + \cfrac{1}{y_4 + \cfrac{1}{y_5 +}}}}}$$

Nehmen wir nur das 0te Glied, so ist y_0 offenbar kleiner, als der Wert des ganzen Kettenbruchs. Geht man bis zum 1sten Gliede, so ist offenbar $y_0 + \frac{1}{y_1}$ zu grofs, weil in dem Bruche $\frac{1}{y_1}$ der Nenner zu klein ist. Geht man bis zum 2ten Gliede, so ist:

$$y_0 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2}}$$

offenbar wieder zu klein &c. Bezeichnet man die hier aufeinander folgenden Werte, welche abwechselnd kleiner und gröfser sind, als der wirkliche Wert des ganzen Kettenbruchs und Näherungswerte (Partialwerte) desselben genannt werden, mit $\frac{a}{a_1}, \frac{b}{b_1}, \frac{c}{c_1}$ &c., so hat man

$$\frac{a}{a_1} = \frac{y_0}{1}$$

$$\frac{b}{b_1} = y_0 + \frac{1}{y_1} = \frac{y_0 y_1 + 1}{y_1}$$

In dem Bruche $\frac{b}{b_1}$ setze man $y_1 + \frac{1}{y_2}$ statt y_1, so kommt der Bruch

$$\frac{c}{c_1} = \frac{y_0\left(y_1 + \frac{1}{y_2}\right) + 1}{y_1 + \frac{1}{y_2}} = \frac{y_0 y_1 y_2 + y_2 + y_0}{y_1 y_2 + 1}.$$

Achtet man hier auf die Verbindung der Glieder des Kettenbruchs, so ergiebt sich ein einfaches Bildungsgesetz, nach welchem man aus den beiden ersten Brüchen $\frac{a}{a_1} = \frac{y_0}{1}$, $\frac{b}{b_1} = \frac{y_0 y_1 + 1}{y_1}$, welche jedoch immer erst unmittelbar gebildet werden müssen, Zähler und Nenner der successiv folgenden Brüche leicht erhalten kann, indem man mit jedem folgenden

Gliede sowohl Zähler als Nenner des vorhergehenden Bruchs multipliziert und zu den Produkten Zähler und Nenner des vorvorhergehenden Bruchs addiert. So ist z. B. wirklich

$$\frac{c}{c_1}=\frac{by_2+a}{b_1y_2+a_1}.$$

Setzt man hierin $y_2+\frac{1}{y_3}$, statt y_2, so ist auch

$$\frac{d}{d_1}=\frac{b\left(y_2+\frac{1}{y_3}\right)+a}{b_1\left(y_2+\frac{1}{y_3}\right)+a_1}=\frac{by_2y_3+ay_3+b}{b_1y_2y_3+a_1y_3+b_1}=\frac{cy_3+b}{c_1y_3+b_1}.$$

Hiernach ist klar, dafs es einerlei ist, ob man jetzt, um den folgenden Bruch $\frac{e}{e_1}$ zu erhalten, in den vorhergehenden $y_3+\frac{1}{y_4}$ statt y_3 setzt, oder nach der obigen Regel verfährt, und dafs dieses Gesetz durchgehends stattfindet.

Hat man z. B. $4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}}}$ oder abgekürzt 4; 2, 3, 5,

so sind die beiden ersten Näherungswerte $\frac{4}{1}$ und $4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$. Daher

	für 4;	2,	3,	5
die Näherungswerte:	$(\frac{4}{1})$;	$(\frac{9}{2})$,	$\frac{9.3+4}{2.3+1}$	
			$\frac{31}{7}$	$\frac{31.5+9}{7.5+2}$
				$\frac{164}{37}$.

Sind 0; 4, 2, 1, 5 die Glieder, so hat man

$$(\tfrac{0}{1}),\ (\tfrac{1}{4}),\ \tfrac{2}{9},\ \tfrac{3}{13},\ \tfrac{17}{74}.$$

Sind 0; 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Glieder, so hat man

$$(\tfrac{0}{1}),\ (\tfrac{1}{1}),\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{30}{43},\ \tfrac{157}{225},\ \tfrac{972}{1393}.$$

153.

Subtrahiert man irgend zwei aufeinander folgende Näherungswerte, so erhält man einen Bruch, dessen Zähler immer ± 1 ist. Diese merkwürdige Eigenschaft läfst sich folgendermafsen beweisen.

Seien $\frac{m}{m_1}$, $\frac{n}{n_1}$ zwei unmittelbar folgende Näherungswerte und y das Glied des Kettenbruchs, welches den folgenden Näherungswert $\frac{p}{p_1}$ bestimmt, so ist

$$\frac{p}{p_1} = \frac{ny+m}{n_1 y + m_1}.$$

Nimmt man nun die Differenz von den beiden Näherungswerten $\frac{p}{p_1}$ und $\frac{n}{n_1}$, sowie auch von $\frac{n}{n_1}$ und $\frac{m}{m_1}$, so ist

$$\frac{ny+m}{n_1 y + m_1} - \frac{n}{n_1} = \frac{mn_1 - m_1 n}{n_1 (n_1 y + m_1)},$$

$$\frac{n}{n_1} - \frac{m}{m_1} = -\frac{(mn_1 - m_1 n)}{m_1 n_1}.$$

Hieraus ergiebt sich, dafs der absolute Wert des Zählers der ersten Differenz, $\frac{p}{p_1} - \frac{n}{n_1}$, ganz derselbe ist, wie bei der zweiten, $\frac{n}{n_1} - \frac{m}{m_1}$, natürlich mit entgegengesetztem Vorzeichen, weil ja die Näherungswerte abwechselnd zu klein und zu grofs sind. Es kommt also nur darauf an, den absoluten Wert eines einzigen dieser gleichen Zähler zu bestimmen. Dazu kann man den Unterschied irgend zweier unmittelbar aufeinander folgenden, also am einfachsten der beiden ersten Näherungswerte nehmen, nämlich

$$\frac{b}{b_1} - \frac{a}{a_1} = \frac{y_0 y_1 + 1}{y_1} - \frac{y_0}{1} = \frac{1}{y_1}.$$

Es ist mithin der beständige Zähler in dem Unterschiede zweier unmittelbar folgenden Näherungswerte $= \pm 1$.

154.

Aus vorstehendem Paragraphen folgt noch, dafs die Unterschiede der Näherungswerte immer kleiner werden $\frac{b}{b_1} - \frac{a}{a_1} = \frac{1}{a_1 b_1}$; $\frac{c}{c_1} - \frac{b}{b_1} = -\frac{1}{b_1 c_1}$, womit denn auch die Benennung Näherungswerte gerechtfertigt ist, weil der letzte den vollen Wert des Kettenbruchs ausdrückt.

155.

Der wahre Wert eines Kettenbruchs, und wenn er auch bis ins Unendliche fortläuft, liegt immer zwischen zwei beliebigen aufeinander folgenden Näherungswerten $\frac{m}{m_1}$, $\frac{n}{n_1}$, weil ja der eine zu klein, der andere zu grofs ist. Da nun der Unterschied dieser beiden nur $\frac{\pm 1}{m_1\, n_1}$, so ist klar, dafs, wenn man irgend einen Näherungswert, z. B. $\frac{m}{m_1}$, statt des ganzen Kettenbruchs setzt, der Fehler gewifs kleiner ist, als ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Quadrat vom Nenner des gesetzten Näherungswertes ist, also kleiner als $\frac{1}{m_1\, m_1}$, weil er ja noch kleiner, als $\frac{1}{m_1\, n_1}$ ist. Der Kettenbruch $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}$ z. B. hat die Näherungswerte $(\frac{0}{1})$, $(\frac{1}{4})$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{17}{74}$. Nimmt man den Bruch $\frac{1}{4}$, statt des ganzen Kettenbruchs, so ist der Fehler, den man begeht, kleiner, als $\frac{1}{16}$. Nimmt man den Bruch $\frac{2}{9}$, so ist der Fehler kleiner, als $\frac{1}{81}$ &c.

156.

In allen für einen Kettenbruch erhaltenen Näherungsbrüchen sind Zähler und Nenner immer Primzahlen gegen einander. Seien z. B. $\frac{m}{m_1}$, $\frac{n}{n_1}$ zwei unmittelbar aufeinander folgende Näherungsbrüche, so ist $\frac{m}{m_1} - \frac{n}{n_1} = \frac{\pm 1}{m_1\, n_1}$,

$$\text{also } mn_1 - m_1 n = \pm 1.$$

Hier sind nun mn_1, $m_1 n$ ganze Zahlen. Hätten also m, m_1 oder n, n_1 einen gemeinschaftlichen Faktor, so würde, indem man vorstehende Gleichung dadurch dividiert, linker Hand der Quotient eine ganze Zahl sein, was aber nicht möglich ist, weil er rechter Hand keine ganze Zahl sein kann.

157.

Wir haben im Vorhergehenden die wichtigsten Eigenschaften der Kettenbrüche mitgeteilt. Was nun ihre Anwendung betrifft, so können sie benutzt werden, um aus einer Zahl eine Quadratwurzel bis auf beliebig viele Dezimalen zu ziehen, was auf periodische Kettenbrüche führt. Eine andere Anwendung finden sie in der sogenannten unbestimmten Analytik und in der höhern Zahlentheorie. Ferner hat man versucht, durch ihre Vermittelung die Wurzeln einer höhern Gleichung zu finden. Die nützlichste Anwendung möchte aber wohl die sein: einen durch sehr viele Ziffern gegebenen Bruch (Verhältnis) näherungsweise und für praktische Zwecke genügend durch kleinere Zahlen auszudrücken, indem man ihn in einen Kettenbruch verwandelt und dessen Näherungswerte sucht.

So ist z. B. $\pi = \frac{31415926536}{10000000000}$

$$31415927 \overset{3}{\smile}\!: 10000000 \overset{7}{\smile}\!: 1415927 \overset{15}{\smile}\!: 88511 \overset{1}{\smile}\!: 88262 \;\&c.$$

Es ist also: $\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}}$
$\ddots$

daher $\pi = \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \ldots$

Oder $e = 2{,}71828\ldots = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}$
$\ddots$

Die Quotienten sind hier

2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10,....

daher $e = \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \ldots$

Anmerkung. Diejenigen, welche sich in gründlichster und eingehendster Weise über die so überaus wichtigen Kettenbrüche und die Anwendung derselben (z. B. auf die diophantischen Gleichungen) unterrichten wollen, verweisen wir auf den 3. Teil des Lehrbuchs der Arithmetik von R. Schurig (§§ 91 und 92).

Leipzig, Friedrich Brandstetter.

Dreizehntes Buch.

Interpolation.

158.

Zufolge § 47 geht aus einer ganzen Funktion vom $n$ten Range

$$y = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Mx + N$$

allemal eine arithmetische Reihe vom $n$ten Range hervor, wenn man statt der veränderlichen Gröfse x successive äquidifferente Werte x_0, x_1, $x_2 \ldots$ setzt, so dafs also:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots$$

oder, wenn man die ganz beliebige beständige Differenz mit h bezeichnet (so dafs $h = x_1 - x_0 = \ldots$), statt x nach und nach x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h \ldots$ setzt.

Hieraus folgt aber, dafs, weil h beliebig ist, und statt x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h \ldots$ auch x_0, $x_0 + \frac{1}{n} h$, $x_0 + \frac{2}{n} h + \ldots$, $x_0 + \frac{n}{n} h$, $x_0 + \frac{n+1}{n} h \ldots$ gesetzt werden darf, man zwischen je zwei Glieder einer arithmetischen Reihe sehr leicht eine gleiche Anzahl neuer Glieder einschalten (interpolieren) kann, welche demselben Gesetze, wie die übrigen, unterworfen sind, mithin alle zusammen eine arithmetische Reihe von demselben Range bilden (vgl. § 48). Dies ist es nun, was man unter Interpolation zu verstehen hat. Da solche Interpolationen bei Entwerfung von Tabellen, welche eine Reihe von durch Zahlen ausgedrückten Beobachtungen oder berechneten Resultaten darstellen, und die

oft eine arithmetische Reihe bilden, zuweilen notwendig werden, um die Tabellen zu vervollständigen, so wollen wir die Theorie der Interpolation durch ein paar Beispiele erläutern.

159.

Aufgabe. Es sind so viele Glieder einer arithmetischen Reihe durch Rechnung oder durch Beobachtung gefunden, dafs der Rang dadurch bestimmt ist, z. B.:

	0	1	2	3	4
	1,	17,	97,	289,	641
d_1 ..	16,	80,	192,	352,	
d_2	64,	112,	160		
d_3	48,	48			
d_4	0				

Es sollen zwischen je zwei Glieder n z. B. drei Glieder interpoliert werden.

Auflösung. Da hier vorausgesetzt ist, dafs die vorliegenden fünf Zahlen: 1, 17, 97, 289, 641, eine wirkliche arithmetische Reihe bilden, so kann man, nachdem durch Bildung der Differenzreihen ihr Rang bestimmt worden, erst nach der allgemeinen Formel (§ 48)

$$y = y_0 + x \,.\, d_1 \,.+ \frac{x \,.\, (x-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, d_2 + \frac{x \,.\, (x-1) \,.\, (x-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, d_3 + \ldots$$

ihr allgemeines Glied suchen. Dieses ist, da hier $y_0 = 1$, $d_1 = 16$, $d_2 = 64$, $d_3 = 48$,

$$y = 8x^3 + 8x^2 + 1.$$

Setzt man hierin $x = 0, 1, 2, 3 \ldots$, so kommt die gegebene Reihe wieder, nämlich

1, 17, 97, 289, 641.

Um nun zwischen je zwei Glieder drei Glieder zu interpolieren, braucht man in demselben allgemeinen Gliede statt der stetigen Zunahme von x, nämlich $h = 1$, nur $h = \frac{1}{4}$ zu nehmen (§ 45) und also $x = 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, \ldots$ zu setzen, so kommt die gegebene Reihe mit drei interpolierten Gliedern, nämlich

$$1, \quad 1\tfrac{5}{8}, \quad 4, \quad 8\tfrac{7}{8}, \quad 17, \quad 29_{8}, \ldots$$

160.

Setzt man in der Formel für das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe:

$$y = y_0 + x . d_1 + \frac{x . x - 1}{1 . 2} d_2 + \frac{x . x - 1 . x - 2}{1 . 2 . 3} d_3 + \ldots$$

$x = 0, \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1} \ldots$, so erhält man dieselbe Reihe mit n interpolierten Gliedern. Setzt man, um Brüche zu vermeiden, $\frac{x}{n+1}$ statt x, so erhält man die gewöhnliche allgemeine Interpolationsformel

$$y = y_0 + \frac{x}{n+1} d_1 + \frac{x.(x-n-1)}{(n+1)^2} . \frac{d_2}{1.2} + \frac{x.(x-n-1)(x-2n\quad 2)}{(n+1)^3} . \frac{d_3}{1.2.3} + \ldots$$

worin nun für x die ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3... zu setzen sind.

161.

Ist die zu interpolierende Reihe vom dritten oder gar noch höhern Range, so wird die Arbeit sehr mühsam*). In der Regel ist aber die zu interpolierende Reihe nur vom zweiten Range (öfters noch vom ersten), also $d_3 = 0$, und dann kann man das Interpolieren durch ganz einfaches Addieren bewirken. Dies ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

So wie man durch Subtraktion aus der Hauptreihe die Differenzreihen bildet, so mufs sich offenbar auch wieder rückwärts durch Addition aus den Differenzreihen oder vielmehr nur aus den Anfangsgliedern sämtlicher Reihen die Hauptreihe bilden lassen. Man hat z. B.

4, 9, 16, 25, 36...
5, 7, 9, 11...
2, 2, 2...

Wäre nun das Anfangsglied einer Reihe $= 4$ gegeben und die Anfangsglieder 5 und 2 ihrer beiden Differenzreihen (also die zu findende Reihe vom zweiten Range), so hat man:

---

*) Für diese Fälle hat Gauss expeditivere Interpolations-Methoden angegeben. S. Berliner astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1830.

2,	2,	2,	2,	2,	2,	2...
5,	7,	9,	11,	13,	15,	17...
4,	9,	16,	25,	36,	49,	64...

162.

Man berechne also, wenn n Glieder interpoliert werden sollen, nach der Interpolationsformel

$$y = y_0 + \frac{x}{n+1} \cdot d_1 + \frac{x.(x-n-1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{d_2}{1.2} + \dots$$

direkt nur so viele Glieder, dafs man die Anfangsglieder der Differenzreihen bilden kann, also drei Glieder, wenn die Reihe vom zweiten, und nur zwei Glieder, wenn sie vom ersten Range (eine arithmetische Progression) ist, und verfahre dann wie im vorhergehenden Beispiel, wobei man, wie es die Umstände oder die Bequemlichkeit des Rechners verlangen, die Reihen unter oder auch neben einander ordnen kann. Sollen z. B. in der Reihe

4, 36, 100, 196

welche, wenigstens in der hier gegebenen Ausdehnung (vier Glieder), als eine arithmetische sich ergiebt, drei Glieder interpoliert werden, so ist hier $n = 3$, $y_0 = 4$, $d_1 = 32$, $d_2 = 32$, $d_3 = 0$, und man hat

$$y = 4 + \frac{x}{4} . 32 + \frac{x.(x-4)}{4\ .\ 4} \cdot \frac{32}{1.2}$$

$$\text{oder } y = 4 + 4x + x^2.$$

Für $x = 0, 1, 2 \dots$ kommt die Reihe

4, 9, 16...
5, 7 ...
2 ...

Mithin sind 4, 5, 2 die Anfangsglieder der gesuchten Differenzreihen; daher:

2,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2...
5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	21,	23...
4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,	121...

163.

Angenommen, es sei die Tabelle der Briggsschen Logarithmen bis zu $\log x_0 = \log 6000 = 3{,}7781513$ berechnet und es solle diese Tabelle für die nun folgenden Zahlen 6001, 6002... bis 6040 fortgesetzt werden.

Statt nun die Logarithmen unmittelbar für die jedesmal um eine Einheit wachsenden Zahlen zu berechnen, was nach § 76 geschehen könnte, ist es bequemer, sie zuerst nur innerhalb schicklicher Intervalle, h, z. B. von 10 zu 10, zu berechnen und dann die Lücken durch Interpolation auszufüllen.

Weil nämlich, wenn man den Modulus der Briggsschen Logarithmen $0{,}43429448\ldots = M$ setzt und beachtet, dafs

$$l(x_0+h) = l\left[x_0\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right] = lx_0 + l\left(1+\frac{h}{x_0}\right)$$

und also der Briggssche Logarithmus, nämlich:

$$\log(x_0+h) = Mlx_0 + M.\frac{h}{x_0} - \frac{M}{2}.\frac{h^2}{x_0^2} + \frac{M}{3}.\frac{h^3}{x_0^3} - + \ldots$$

so sieht man, dafs, weil $x_0 = 6000$, für kleine Werte von $h = 10, 20, 30\ldots$ die unendliche Reihe sehr konvergent wird, und dafs bis zu einer gewissen Grenze, z. B. bis $h = 40$, das dritte Glied $\frac{M}{3}.\frac{h^3}{x_0^3} = \frac{M}{3}.\frac{40^3}{6000^3}$ schon vernachlässigt werden kann, wenn man die Logarithmen nur bis auf sieben Dezimalen genau haben will. Man kann also in diesem Falle die zwar transscendente Reihe dennoch als eine arithmetische betrachten, und zwar vom zweiten Range, so lange das dritte, und vom dritten Range, so lange das vierte Glied keinen Einflufs hat.

Da nun $\log x_0 = Mlx_0$ schon bekannt ($\log 6000 = 3{,}7781513$), so hat man aus der Gleichung

$$\log(x_0+h) = Mlx_0 + M\frac{h}{x_0} - \frac{M}{2}.\frac{h^2}{x_0^2},$$

indem man $h = 0, 10, 20\ldots$ setzt,

	y_0	d_1	d_2	d_3
log 6000	= 3,7781513			
... 6010	= 3,7788745	7232		
... 6020	= 3,7795965	7220	— 12	
... 6030	= 3,7803173	7208	— 12	0
... 6040	= 3,7810369	7196	— 12	0

Sollen nun 9 Glieder interpoliert werden, so geht die Interpolationsformel

$$y = y_0 + \frac{x}{n+1} \cdot d_1 + \frac{x(x-n-1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{d_2}{1 \cdot 2},$$

mit $n = 9$; $d_1 = 7232$; $d_2 = -12$; $d_3 = 0$ und $y_0 = 3{,}7781513$, über in

$$y = 3{,}7781513 + 723{,}8x - 0{,}06x^2.$$

y	d_1	d_2
3,7781513	723,74	— 0,12
2236,74	723,62	
2960,36	723,50	
3683,86	723,38	
4407,24	723,26	
5130,50	723,14	
5853,64	723,02	
6576,66	722,90	
7299,56	722,78	
8022,34	722,66	
8745,00	722,54	
9467,54	722,42	
3,7790189,96	722,32	
0912,28		

Setzt man hierin $x = 0, 1, 2\ldots$ so kommt die Reihe in der ersten Kolumne, die man aber, nachdem nur die drei ersten Glieder und die erste und zweite Differenz berechnet sind, leichter durch Addition bilden kann.

Die kleine konstante Differenz — 0,12 kann man leicht im Kopfe behalten und deshalb sehr schnell die erste Differenzreihe und daraus die gesuchte Hauptreihe bilden. Offenbar wird auch ein geübter Rechner nicht so viele Ziffern schreiben, als hier der Deutlichkeit halber geschehen.

164.

Auf diese Weise sind nun sehr viele Tabellen (logarithmische, trigonometrische, astronomische, physikalische &c.) berechnet. Nur wenige Zahlen werden direkt berechnet oder durch Beobachtung und Experimente bestimmt und dann die übrigen, also die meisten, durch Interpolation gefunden. Das

Interpolieren wird innerhalb kleiner Intervalle selbst dann noch oftmal angewandt, wenn die Differenzen d_1, d_2, $d_3 \ldots$ auch nicht strenge auf 0 auslaufen, jedoch immer kleiner und beinahe gleich werden. Alsdann wird von den letzten beinahe gleichen Differenzen das arithmetische Mittel als konstant genommen. Je kleiner dann die stets abnehmenden Differenzen d_1, $d_2 \ldots$ sind, desto mehr konvergiert die Interpolationsreihe.

165.

Ist die Funktion zwischen zwei veränderlichen Gröfsen, x, y, nicht bekannt und sind die für x gesetzten Werte x_0, x_1 $x_2 \ldots$, zu welchen die durch Beobachtung gefundene Reihe y_0, y_1, $y_2 \ldots$ gehört, nicht äquidifferent, so kann man auch nicht auf die vorhin gezeigte Weise die zu andern Werten von x gehörigen Werte von y finden oder interpolieren. Um jedoch auch in diesem Fall eine Relation $y = f(x)$ aufzustellen, könnte man bei n Beobachtungen von der folgenden Form (parabolischen Linien) ausgehen:

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots\ldots + mx^{n-1},$$

und die Koeffizienten a, b, $c, \ldots$, m aus den n Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
y_0 &= a + bx_0 + cx_0^2 + \ldots + mx_0^{n-1} \\
y_1 &= a + bx_1 + cx_1^2 + \ldots + mx_1^{n-1} \\
&\vdots \\
y_{n-1} &= a + bx_{n-1} + cx_{n-1}^2 + \ldots + mx_{n-1}^{n-1}
\end{aligned}$$

berechnen. Die Arbeit wäre aber selbst für wenige Beobachtungen eine überaus mühsame und für jeden andern Punkt immer aufs neue zu wiederholen. Durch folgende Betrachtung kommt man aber leichter zum Ziel.

166 a.

Bei dem wirklichen Versuche*), die Elimination nach der gewöhnlichen Methode auszuführen, macht man (was auch vor-

*) Wir folgen von hier an fast wörtlich der Abhandlung im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1830.

auszusehen), die Beobachtung, dafs, weil die Bedingungsgleichungen (deren hier nur 4 angenommen werden mögen) in Bezug auf die Gröfsen y_0, y_1, y_2, y_3 linear sind, d. h. diese Gröfsen nur in der ersten Potenz enthalten, dieselben auch in den allgemeinen Formeln für die zu findenden Koeffizienten *a*, *b*, *c*, *d* nur linear (nur in der ersten Potenz und nicht miteinander multipliziert) vorkommen können, und dafs es in den Formeln für *a*, *b*, *c*, *d* kein Glied geben wird, welches nicht eine dieser Gröfsen y_0, y_1, y_2, y_3 als Faktor enthielte. Man ist deshalb berechtigt, anzunehmen, dafs

$$y = F(x) \cdot y_0 + f(x) \cdot y_1 + \varphi(x) \cdot y_2 + \psi(x) \cdot y_3$$

wo $F(x)$, $f(x)$ &c. ganze Funktionen von x sind. Diese Funktionen müssen für vorliegendes Beispiel vom dritten Grade und so beschaffen sein, dafs

für $x = x_0$ $\quad F(x)=1,\ f(x)=0,\ \varphi(x)=0,\ \psi(x)=0$
für $x = x_1$ dagegen $\quad F(x)=0,\ f(x)=1,\ \varphi(x)=0,\ \psi(x)=0$
für $x = x_2$ $\quad F(x)=0,\ f(x)=0,\ \varphi(x)=1,\ \psi(x)=0$
für $x = x_3$ $\quad F(x)=0,\ f(x)=0,\ \varphi(x)=0,\ \psi(x)=1$

weil sonst nicht für $x = x_0, x_1, x_2, x_3$; $y = y_0, y_1, y_2, y_3$ kommen kann.

Soll aber $F(x) = 0$ werden für $x = x_1, x_2, x_3$, so lehrt die Algebra, dafs $F(x)$ die drei Faktoren $x - x_1$, $x - x_2$, $x - x_3$ enthalten mufs (§ 104). In dem, was $F(x)$ sonst noch enthält, darf kein x mehr vorkommen, weil x sonst gegen die Voraussetzung die dritte Potenz überschreiten würde. Bezeichnen wir also mit C den Inbegriff der übrigen konstanten Faktoren in $F(x)$, so ist

$$F(x) = C(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Nach der ersten Bedingung mufs aber für $x = x_0$, $F(x) = 1$ sein, daher

$$1 = C(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3),$$

$$\text{mithin } C = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$\text{folglich } F(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}.$$

Dieselben Schlüsse auf $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ angewendet, geben den allgemeinen Ausdruck:

$$y = \begin{cases} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \cdot y_0 + \\ \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot y_1 + \\ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot y_2 + \\ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot y_3 \end{cases}$$

Diese äufserst regelmäfsige Interpolationsformel eignet sich für den Gebrauch der Logarithmen und läfst sich offenbar leicht auf beliebig viele Punkte ausdehnen. Sie findet sich auch unter dem Namen Lagrange's Interpolationsformel in Lacroix's Calcul différent. et intégral, jedoch ohne Begründung.

166 b.

Die im vorhergehenden Paragraph entwickelte Interpolationsformel ist nur scheinbar richtig, da das Problem offenbar nicht durch eine gebrochene, sondern durch eine ganze Funktion gelöst werden mufs. Wir geben daher im nachstehenden eine von R. Schurig gefundene Lösung dieses wichtigen Problems, deren unzweifelhafte Richtigkeit unmittelbar aus der Deduktion und dem am Schlusse derselben hinzugefügten Beispiele erhellt.

Sind die beiden korrespondierenden Reihen:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots\ldots$$
$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \ldots\ldots$$

und soll das zu dem gegebenen x_n gehörende y_n gefunden werden, so bestimme man zunächst die Differenzen der beiden Reihen:

$$\begin{array}{llllllll} & x_0, & x_1, & x_2, & x_3 \ldots\ldots \\ \text{Diff.} & A & A_2 & A_3 & \\ & & B & B_2 & B_3 \\ & & & C & C_2 \quad C_3 \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} & y_0, & y_1, & y_2, & y_3 \ldots\ldots \\ \text{Diff.} & a & a_2 & a_3 \ldots \\ & & b & b_2 & b_3 \ldots \\ & & & c & c_2 \ldots \end{array}$$

Hierauf löse man

$$x_n = x_0 + \left(A - \frac{B}{2} + \frac{C}{3} \ldots\right) n + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2} \ldots\right) n^2 + \left(\frac{C}{6} \ldots\right) n^3 + \ldots$$

(s. Formel P in § 48) nach n auf und es ergiebt sich alsdann sofort (nach derselben Formel):

$$y_n = y_0 + \left(a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \ldots\right)n + \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2}\ldots\right)n^2 + \left(\frac{c}{6}\ldots\right)n^3 + \ldots$$

Beispiel. Die Reihen

$$\left.\begin{array}{lllllll} 3, & 8, & 15, & 24, & 35, & 48, & 63\ldots \\ 8, & 12, & 13, & 11, & 6, & -2, & -13.. \end{array}\right\}\ldots(W)$$

sind vom 2. Grade. Läfst man in denselben ein Glied um das andere weg, so erhält man die Reihen:

$$x = 3,\quad 15,\quad 35,\quad 63\ldots$$
$$y = 8,\quad 13,\quad 6,\quad -13..$$

die wir als die gegebenen betrachten wollen. Da diese nach § 46 gleichfalls vom 2. Grade sein müssen, so würde zu dem nicht unmittelbar gegebenen Werte $x_n = 8$ der 1. Reihe offenbar der Wert $y_n = 12$ in der 2. Reihe gehören, wie aus den Reihen W ersichtlich ist.

Nehmen wir nun an, dafs zu dem gegebenen $x_n = 8$ das entsprechende y_n erst gefunden werden soll, so würde man zunächst die bestimmenden Elemente aufzusuchen haben.

Für die x-Reihe findet man die Differenzen:

$$\begin{array}{ccccc} 12, & & 20, & & 28,.. \\ & 8, & & 8,\ldots & \end{array}$$

für die y-Reihe die Differenzen

$$\begin{array}{ccccc} 5, & & -7, & & -19\ldots \\ & -12, & & -12\ldots & \end{array}$$

Mithin ist $x_n = 8,\ x_0 = 3,\ x_1 = 15\ldots,\ A = 12,\ B = 8,$
$y_0 = 8,\ y_1 = 13\ldots,\ a = 5,\ b = -12.$

Nach der für x_n gegebenen Formel ist nun

$$8 = 3 + (12 - \tfrac{8}{2})n + \tfrac{8}{2}n^2;\ \text{folglich } n = \tfrac{1}{2}.$$

Die letzte Formel giebt damit

$$y_n = 8 + \left[5 - \left(-\frac{12}{2}\right)\right] \cdot \tfrac{1}{2} + \frac{-12}{2} \cdot \tfrac{1}{4} = 12,$$

wie es die Natur der Aufgabe verlangt, während man nach § 166a den falschen Wert $10\frac{59}{64}$ erhält.

Anhang.

Summation einiger Reihen.

167.

Bezeichnet man die Summe der Reihe:

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) + \ldots + \cos(\alpha+n\varphi)$$

d. h. den dafür zu setzenden und gleichwertigen geschlossenen Ausdruck vorläufig mit s und multipliziert auf beiden Seiten mit $2\cos\varphi$, so ist

$$2s.\cos\varphi = 2\cos\alpha\cos\varphi + 2\cos(\alpha+\varphi).\cos\varphi + 2\cos(\alpha+2\varphi)\cos\varphi + \ldots + 2\cos(\alpha+n\varphi)\cos\varphi.$$

Zufolge Trigonometrie § 52, 52 ist

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha-\varphi) &= 2\cos\alpha.\cos\varphi\\
\cos(\alpha+2\varphi) + \cos\alpha &= 2\cos(\alpha+\varphi).\cos\varphi\\
\cos(\alpha+3\varphi) + \cos(\alpha+\varphi) &= 2\cos(\alpha+2\varphi).\cos\varphi\\
\cos(\alpha+4\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) &= 2\cos(\alpha+3\varphi).\cos\varphi\\
&\vdots\\
\cos(\alpha+(n+1)\varphi) + \cos(\alpha+(n-1)\varphi) &= 2\cos(\alpha+n\varphi).\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Dies substituiert, kommt

$$2s.\cos\varphi = \begin{cases}\cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) + \cos(\alpha+3\varphi) + \ldots + \cos(\alpha+(n+1)\varphi)\\ \cos(\alpha-\varphi) + \cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi) + \ldots + \cos(\alpha+(n-1)\varphi)\end{cases}$$

$$2s.\cos\varphi = s - \cos\alpha + \cos(\alpha+(n+1)\varphi) + \cos(\alpha-\varphi) + s - \cos(\alpha+n\varphi)$$

$$2s.(1-\cos\varphi) = \cos(\alpha+n\varphi) - \cos(\alpha+(n+1)\varphi) - [\cos(\alpha-\varphi) - \cos\alpha]$$

$$2s.2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi = 2\sin(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\varphi).\sin\tfrac{1}{2}\varphi - 2\sin(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi).\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$2s.\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sin(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\varphi) - \sin(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$2s.\sin\tfrac{1}{2}\varphi = 2\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}n\varphi).\sin\frac{n+1}{2}\varphi$$

$$s = \frac{\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}n\varphi).\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\tfrac{1}{2}\varphi}.$$

Es ist mithin

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\varphi)+\cos(\alpha+2\varphi)+..+\cos(\alpha+n\varphi)=\frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi).\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

und wenn man $\alpha=0$ setzt, so ist

$$1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos n\varphi=\frac{\cos\frac{1}{2}n\varphi.\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

168.

Multipliziert man die Gleichung

$$s=\sin\alpha+\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha+2\varphi)+\ldots+\sin(\alpha+n\varphi)$$

beiderseits mit 2 cos φ, so ist

$$2s.\cos\varphi=2\sin\alpha.\cos\varphi+2.\sin(\alpha+\varphi).\cos\varphi+\ldots+2\sin(\alpha+n\varphi).\cos\varphi\ldots(1)$$

Nun aber ist

$$\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha-\varphi)=2\sin\alpha.\cos\varphi$$
$$\sin(\alpha+2\varphi)+\sin\alpha=2\sin(\alpha+\varphi).\cos\varphi$$
$$\sin(\alpha+3\varphi)+\sin(\alpha+\varphi)=2\sin(\alpha+2\varphi).\cos\varphi$$
$$\sin(\alpha+4\varphi)+\sin(\alpha+2\varphi)=2\sin(\alpha+3\varphi).\cos\varphi$$
$$\vdots$$
$$\sin(\alpha+(n+1)\varphi)+\sin(\alpha+(n-1)\varphi)=2\sin(\alpha+n\varphi).\cos\varphi.$$

Dies in Gleichung (1) substituiert, kommt:

$$2s.\cos\varphi=\begin{cases}\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha+2\varphi)+\ldots+\sin(\alpha+(n+1)\varphi)\\ \sin(\alpha-\varphi)+\sin\alpha+\sin(\alpha+\varphi)+\ldots+\sin(\alpha+(n-1)\varphi)\end{cases}$$

$$2s.\cos\varphi=s-\sin\alpha+\sin(\alpha+(n+1)\varphi)+\sin(\alpha-\varphi)+s-\sin(\alpha+n\varphi)$$

$$2s.(1-\cos\varphi)=\sin\alpha-\sin(\alpha-\varphi)-\{\sin(\alpha+(n+1)\varphi)-\sin(\alpha+n\varphi)\}$$

$$2s.(1-\cos\varphi)=2\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi).\sin\tfrac{1}{2}\varphi-2\cos(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\varphi)\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$2s.\sin\tfrac{1}{2}\varphi=\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi)-\cos(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\varphi)$$

$$2s.\sin\tfrac{1}{2}\varphi=2\sin(\alpha+\tfrac{1}{2}n\varphi).\sin\frac{n+1}{2}\varphi.$$

Es ist mithin

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha+2\varphi)+\sin(\alpha+3\varphi)+\ldots+\sin(\alpha+n\varphi)=\frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi).\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

und wenn man $\alpha=0$ setzt,

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\ldots+\sin n\varphi=\frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi.\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

169.

Um die Summe der Reihe

$$\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{3\varphi}{2}+\sin\frac{5\varphi}{2}+\ldots+\sin\frac{2n-1}{2}\varphi$$

zu finden, beachte man, dafs (Trigonometrie § 100):

$$1-\cos\varphi=2\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\cos\varphi-\cos 2\varphi=2\sin\frac{3\varphi}{2}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\cos 2\varphi-\cos 3\varphi=2\sin\frac{5\varphi}{2}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\vdots$$

$$\cos(n-1)\varphi-\cos n\varphi=2\sin\frac{2n-1}{2}\varphi\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Addiert man dies System von Gleichungen, so kommt:

$$1-\cos n\varphi=2\sin\tfrac{1}{2}\varphi\left(\sin\tfrac{1}{2}\varphi+\sin\frac{3\varphi}{2}+\sin\frac{5\varphi}{2}+\ldots+\sin\frac{2n-1}{2}\varphi\right)$$

Es ist mithin $\left(\text{weil } 1-\cos n\varphi=2\sin^2\frac{n\varphi}{2}\right)$

$$\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{3\varphi}{2}+\sin\frac{5\varphi}{2}+\ldots+\sin\frac{2n-1}{2}\varphi=\frac{\sin^2\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

170.

Allgemeine Regeln, gesetzmäfsige unendliche konvergente Reihen zu summieren, kann die Analysis allein nicht geben. Fast in jedem besondern Falle müssen, wenn die Summation überhaupt möglich ist, besondere Kunstgriffe benutzt werden. Oftmals geschieht es dadurch, dafs man die unendliche Reihe mit irgend einem schicklich gewählten Faktor multipliziert (wie eben schon bei ein paar endlichen Reihen gezeigt), oft auch dadurch, dafs man die Koeffizienten der Potenzen der veränderlichen Gröfse in einzelne Brüche zerlegt und zusieht, ob die dadurch entstandenen neuen Reihen anderweitig schon bekannt und summierbar sind. Ist dies der Fall, so ist damit zugleich die Konvergenz der Reihe bewiesen. Nehmen wir z. B. die Reihe

$$\frac{x}{1.2}-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}-\frac{x^4}{4.5}+-\ldots\pm\frac{x^n}{n.(n+1)}$$

so kann man, weil (§ 142) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, mithin:

$$\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

obige Reihe auch so schreiben:

$$x\left(1-\frac{1}{2}\right)-x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+x^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-x^4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+-\ldots$$

Diese Reihe zerlegt sich nun aber in folgende zwei:

$$\begin{cases} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+-\ldots\ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

Die erste Reihe ist bekannt, $=l(1+x)$, die zweite Reihe läſst sich, indem man 1 addiert und subtrahiert, so schreiben:

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+-\ldots-1$$

oder auch so:

$$\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\ldots}{x}-1.$$

Dies ist aber $=\frac{l(1+x)}{x}-1$. Daher die fragliche Reihe

$$\frac{x}{1.2}-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}-\frac{x^4}{4.5}+-+-\ldots=l(1+x)+\frac{l\,(1+x)}{x}-1$$
$$=\frac{x+1}{x}.l(1+x)-1.$$

Setzt man $x=1$, so ist

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+-\ldots=2l2-1=l4-1.$$

171.

Aufgabe. Man suche die Summe folgender Reihe:

$$\frac{x}{1.3}-\frac{x^2}{3.5}+\frac{x^3}{5.7}-\frac{x^4}{7.9}+-\ldots\ldots\pm\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Auflösung. Die Koeffizienten lassen sich folgenderweise zerlegen (§ 142):

$$\frac{1}{1.3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3.5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5.7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

$$\vdots$$

Obige Reihe, deren Summe wir $=s$ setzen, zerlegt sich also in folgende zwei:

$$s=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{5}-\frac{x^4}{7}+-\ldots\right)\\-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{7}-\frac{x^4}{9}+-\ldots\right)\end{cases}$$

oder, indem wir $x=u^2$ setzen, in:

$$2s=\begin{cases}u\left(u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}+\ldots\right)\ldots\ldots\ldots(1)\\-\frac{u^2}{3}+\frac{u^4}{5}-\frac{u^6}{7}+-+\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

Die erste Reihe ist offenbar $=u\,\mathrm{Arctg}\,u$ (§ 87, (1)).

Die zweite Reihe läſst sich so schreiben:

$$1-\frac{u^2}{3}+\frac{u^4}{5}-\frac{u^6}{7}+\ldots-1$$

oder auch so: $$\frac{u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}+\ldots}{u}-1$$

mithin ist

$$2s = u \operatorname{Arctg} u + \frac{\operatorname{Arctg} u}{u} - 1 = \frac{u^2+1}{u} \operatorname{Arctg} u - 1.$$

Folglich ist, weil $u = \sqrt{x}$:

$$\frac{x}{1.3} - \frac{x^2}{3.5} + \frac{x^3}{5.7} - \frac{x^4}{7.9} + - \ldots = \frac{x+1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Arctg} \sqrt{x} - \tfrac{1}{2}.$$

Setzt man $x = 1$, so ist

$$\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + - \ldots = \frac{\pi - 2}{4}.$$

172.

Aufgabe. Man suche die Summe folgender Reihe

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Auflösung. Es ist:

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Addiert man diese Gleichungen, so erhält man

$$\Sigma\left[\frac{1}{n.(n+1)}\right] = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

und für $n = \infty$ (weil dann $\frac{1}{n}$ oder $\frac{1}{n+1} = 0$ ist):

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots \text{ in infinitum.}$$

173.

Aufgabe. Die Summe s folgender Reihe zu finden:

$$s = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots$$

Auflösung. Multipliziere beiderseits mit $x - 1$, so kommt

$$(x-1)\,s = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - - \dots.$$

$$(x-1)\,s + 1 = \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \dots$$

Setzt man jetzt $x = 1$, so ist

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots \text{in inf.}$$

174.

Umgekehrt lassen sich aber nach einer sehr leichten Regel unzählige gesetzmäſsige Reihen bestimmen, welche alle summierbar sind. Schreibt man nämlich eine beliebige Reihe von Zahlen hin und bildet dann die sogenannte Summenreihe, indem man die Summen von ein, zwei, drei &c. Gliedern sucht, so muſs offenbar, wenn man in der gebildeten Summenreihe das erste Glied vom zweiten subtrahiert, das zweite Glied der summierten Reihe, und wenn man das zweite vom dritten subtrahiert, das dritte und allgemein das $n$te Glied der summierten Reihe kommen, wenn man das $(n-1)$te Glied der Summenreihe vom $n$ten Gliede derselben subtrahiert. Aus dieser Vorstellung folgt nun aber, daſs, wenn man eine nach positiver Seite, also für die Zahlen, 1, 2, 3..... kontinuierliche Funktion von x, z. B. $\frac{x}{x+1}$, als das summatorische Glied einer unbekannten Reihe, als bekannt annimmt, man das allgemeine (x)te Glied der unbekannten Reihe (also auch die Reihe selbst) findet, wenn man das $(x-1)$te Glied vom $x$ten Gliede subtrahiert. Soll z. B. $\frac{x}{x+1}$ das summatorische Glied sein, so ist das allgemeine (x)te Glied der entsprechenden Reihe

$$= \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} = \frac{1}{x(x+1)}$$

folglich ist (vergl. § 51)

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{x(x+1)}.$$

Soll x^2 das summatorische Glied sein, so ist das allgemeine (x)te Glied der entsprechenden Reihe $= x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$. Daher

$$x^2 = 1 + 3 + 5 + 7 \ldots + (2x - 1).$$

175.

Lehrsatz. Wenn die Reihe $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ summierbar ist, so sind zu gleicher Zeit auch folgende beiden Reihen summierbar:

$$a + bx . \sin \alpha + cx^2 \sin 2\alpha + dx^3 . \sin 3\alpha + \ldots$$
$$a + bx . \cos \alpha + cx^2 \cos 2\alpha + dx^3 . \cos 3\alpha + \ldots$$

Beweis. Man setze die Summe der ersten Reihe $= y$, die der zweiten $= z$, multipliziere die erste mit $i = \sqrt{-1}$ und addiere sie zur zweiten, so hat man

$$z + yi = a(1 + i) + bx(\cos\alpha + i \sin\alpha) + cx^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + \ldots$$

oder auch (§ 88)

$$z + yi = a(1 + i) + bx(\cos\alpha + i \sin\alpha) + cx^2 (\cos\alpha + i \sin\alpha)^2 + \ldots$$

oder wenn man $x(\cos\alpha + i \sin\alpha) = u$ setzt

$$z + yi = ai + a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + \ldots$$

Die Summe der Reihe $a + bx + cx^2 + \ldots$, welche nach Voraussetzung summierbar ist, wird irgend eine Funktion von x sein; bezeichnen wir sie mit F (x), so ist auch

$$z + yi = ai + F(u).$$

Die Funktion F (u) besteht aus reellen und imaginären Teilen, läfst sich aber (§ 88) in zwei Teile zerlegen, wovon der eine reell, der andere imaginär ist, so dafs wir $F(u) = p + qi$ setzen können. Mithin ist

$$z + yi = p + qi + ai = p + (q + a) . i.$$

Sind aber zwei komplexe Gröfsen einander gleich, so müssen offenbar die reellen und imaginären Teile besonders einander gleich sein (§ 85), daher:

$$z = p$$
$$y = q + a$$

Setzt man z. B. $a = b = c = \ldots = 1$, so hat man die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 \ldots$ deren Summe (§ 62) $= \frac{1}{1-x}$, also $F(x) = \frac{1}{1-x}$, mithin auch $F(u) = \frac{1}{1-u}$. In diesem besondern Fall ist also

$$z + yi = i + \frac{1}{1-u}$$

oder für u seinen Wert gesetzt,

$$z + yi = i + \frac{1}{1 - x\cos\alpha - ix\sin\alpha}$$

Zähler und Nenner mit $1 - x\cos\alpha + ix\sin\alpha$ multipliziert,

$$z + yi = i + \frac{1 - x\cos\alpha + ix\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}.$$

$$z + yi = \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} + \left(1 + \frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}\right) i.$$

Man hat also

$$z = 1 + x\cos\alpha + x^2\cos 2\alpha + x^3\cos 3\alpha + \ldots = \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2},$$

$$y = 1 + x\sin\alpha + x^2\sin 2\alpha + x^3\sin 3\alpha + \ldots = 1 + \frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}.$$

Theorie der imaginären Gröfsen.

176.

Die sehr subtile Theorie der imaginären Gröfsen wurde zuerst von Gaufs streng wissenschaftlich begründet. Die uns bereits 1830 mündlich mitgeteilten tiefsinnigen Ansichten darüber sind seitdem in einer Vorlesung der Societät der

Wissenschaften in Göttingen überreicht. Der Bericht darüber findet sich in den Göttinger gelehrten Anzeigen 1831, 64. Stück. Da aber diese Anzeigen wohl nur wenige sich verschaffen können, so wollen wir aus dem fraglichen Bericht hier folgendes mitteilen:

„So wie die absoluten ganzen Zahlen durch eine in einer geraden Linie unter gleichen Entfernungen geordnete Reihe von Punkten dargestellt werden, in der der Anfangspunkt die Zahl 0, der nächste die Zahl 1 u. s. w. vertritt; und so wie dann zur Darstellung der negativen Zahlen nur eine unbegrenzte Verlängerung dieser Reihe auf der entgegengesetzten Seite des Anfangspunkts erforderlich ist: so bedarf es zur Darstellung der komplexen ganzen Zahlen nur des Zusatzes, dafs jene Reihe als in einer unbegrenzten Ebene befindlich angesehen und parallel mit ihr auf beiden Seiten eine unbeschränkte Anzahl ähnlicher Reihen in gleichen Abständen von einander angenommen werde, so dafs wir, anstatt einer Reihe von Punkten, ein System von Punkten vor uns haben, die sich auf eine zwiefache Art in Reihen von Reihen ordnen lassen, und zur Bildung einer Einteilung der ganzen Ebene in lauter gleiche Quadrate dienen. Der nächste Punkt bei 0 in der ersten Nebenreihe auf der einen Seite der Reihe, welche die reellen Zahlen repräsentiert, bezieht sich dann auf die Zahl i, sowie der nächste Punkt bei 0 in der nächsten Nebenreihe auf der andern Seite auf $-i$ u. s. f. Bei dieser Darstellung wird die Ausführung der arithmetischen Operationen in Beziehung auf die komplexen Gröfsen einer Versinnlichung fähig, die nichts zu wünschen übrig läfst.

Von der andern Seite wird hierdurch die wahre Metaphysik der imaginären Gröfsen in ein neues helles Licht gestellt.

Unsere allgemeine Arithmetik, von deren Umfang die Geometrie der Alten so weit überflügelt wird, ist ganz die Schöpfung der neueren Zeit. Ursprünglich ausgehend von dem Begriff der absoluten ganzen Zahlen, hat sie ihr Gebiet stufenweise erweitert; zu den ganzen Zahlen sind die gebrochenen, zu den rationalen die irrationalen, zu den positiven die negativen, zu den reellen die imaginären hinzugekommen. Dies Vorschreiten ist aber immer anfangs mit furchtsam zögerndem Schritt geschehen. Die ersten Algebraisten nannten noch die

negativen Wurzeln der Gleichungen falsche Wurzeln, und sie sind es auch, wo die Aufgabe, auf welche sie sich beziehen, so eingekleidet vorgetragen ist, daſs die Beschaffenheit der gesuchten Gröſse kein Entgegengesetztes zuläſst. Allein so wenig man in der allgemeinen Arithmetik Bedenken hat, die gebrochenen Zahlen mit aufzunehmen, obgleich es so viele zählbare Dinge giebt, wobei eine Bruchzahl ohne Sinn ist, ebensowenig durften in jener den negativen Zahlen gleiche Rechte mit den positiven deshalb versagt werden, weil unzählige Dinge kein Entgegengesetztes zulassen: die Realität der negativen Zahlen ist hinreichend gerechtfertigt, da sie in unzähligen anderen Fällen ein adäquates Substrat finden. Darüber ist man nun freilich seit langer Zeit im Klaren. Allein die den reellen Gröſsen gegenübergestellten imaginären — ehemals und hin und wieder noch jetzt, obwohl unschicklich, unmögliche genannt — sind noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr wie ein an sich inhaltleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieses Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Gröſsen steuert, verschmähen zu wollen.

Der Verf. (Gauſs) hat diesen hochwichtigen Teil der Mathematik seit vielen Jahren aus einem verschiedenen Gesichtspunkte betrachtet, wobei den imaginären Gröſsen ebenso gut ein Gegenstand untergelegt werden kann, wie den negativen: es hat aber bisher an einer Veranlassung gefehlt, dieses öffentlich bestimmt auszusprechen, wenngleich aufmerksame Leser die Spuren davon in der 1799 erschienenen Schrift über die Gleichungen und in der Preisschrift über die Umbildung der Flächen leicht wiederfinden werden. In der gegenwärtigen Abhandlung sind die Grundzüge davon kurz angegeben, sie bestehen in folgendem:

Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleich zu stellen ist. Genau besehen, findet diese Voraussetzung nur da statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände), sondern Relationen zwischen je zwei Gegenständen das Gezählte sind. Postuliert wird dabei, daſs diese Gegenstände auf eine bestimmte Art in eine Reihe geordnet sind, z. B. A, B, C, D..., und

dafs die Relation des A zu B als der Relation des B zu C u. s. w. gleich betrachtet werden kann. Hier gehört nun zu dem Begriff der Entgegensetzung nichts weiter, als der Umtausch der Glieder der Relation, so dafs, wenn die Relation (oder der Übergang) von A zu B als + 1 gilt, die Relation von B zu A durch —1 dargestellt werden mufs. Insofern also eine solche Reihe auf beiden Seiten unbegrenzt ist, repräsentiert jede reelle ganze Zahl die Relation eines beliebig als Anfang gewählten Gliedes zu einem bestimmten Gliede der Reihe.

Sind aber die Gegenstände von solcher Art, dafs sie nicht in eine, wenn gleich unbegrenzte Reihe geordnet werden können, sondern sich nur in Reihen von Reihen ordnen lassen, oder, was dasselbe ist, bilden sie eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen; verhält es sich dann mit den Relationen einer Reihe zu einer andern oder den Übergängen aus einer in die andere auf eine ähnliche Weise, wie vorhin mit den Übergängen von einem Gliede einer Reihe zu einem andern Gliede derselben Reihe, so bedarf es offenbar zur Abmessung des Übergangs von einem Gliede des Systems zu einem andern, aufser den vorigen Einheiten + 1 und — 1, noch zweier anderer unter sich auch entgegengesetzten + i und — i. Offenbar mufs aber dabei noch postuliert werden, dafs die Einheit i allemal den Übergang von einem gegebenen Gliede einer Reihe zu einem bestimmten Gliede der unmittelbar angrenzenden Reihe bezeichne. Auf diese Weise wird also das System auf eine doppelte Art in Reihen von Reihen geordnet werden können.

Der Mathematiker abstrahiert gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen; er hat es blofs mit der Abzählung und Vergleichung der Relationen unter sich zu thun: insofern ist er ebenso, wie er den durch + 1 und — 1 bezeichneten Relationen, an sich betrachtet, Gleichartigkeit beilegt, solche auf alle vier Elemente + 1, — 1, + i und — i zu erstrecken befugt.

Zur Anschauung lassen sich diese Verhältnisse nur durch eine Darstellung im Raume bringen, und der einfachste Fall ist, wo kein Grund vorhanden ist, die Symbole der Gegenstände anders als quadratisch anzuordnen, indem man nämlich eine unbegrenzte Ebene durch zwei Systeme von Parallellinien, die einander rechtwinklig durchkreuzen, in Quadrate verteilt und

die Durchschnittspunkte zu den Symbolen wählt. Jeder solcher Punkt A hat hier vier Nachbarn, und wenn man die Relation des A zu einem benachbarten Punkte durch $+1$ bezeichnet, so ist die durch -1 zu bezeichnende von selbst bestimmt, während man, welche der beiden andern man will, für $+i$ wählen, oder den sich auf $+i$ beziehenden Punkt nach Gefallen rechts oder links nehmen kann. Dieser Unterschied zwischen rechts und links ist, sobald man vorwärts und rückwärts in der Ebene, und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes andern nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen nachweisen können*). Wenn man aber auch über letzteres sich entschlossen hat, sieht man, daſs es doch von unserer Willkür abhing, welche von den beiden sich in einem Punkte durchkreuzenden Reihen wir als Hauptreihe und welche Richtung in ihr man als auf positive Zahlen sich beziehend ansehen wollte; man sieht ferner, daſs, wenn wir die vorher als $+i$ behandelte Relation für $+1$ nehmen wollen, man notwendig die vorher durch -1 bezeichnete Relation für $+i$ nehmen muſs. Das heiſst aber in der Sprache der Mathematiker: $+i$ ist mittlere Proportionalgröſse zwischen $+1$ und -1 oder entspricht dem Zeichen $\sqrt{-1}$; wir sagen absichtlich nicht die mittlere Proportionalgröſse, denn $-i$ hat offenbar gleichen Anspruch. Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr bedarf es nicht, um diese Gröſse in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen.

Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der sogenannten imaginären Gröſsen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichts-

---

*) Beide Bemerkungen, sagt Gauſs, hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, daſs der Raum nur Form unserer äuſsern Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegenteil, und daſs der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muſs, beweiset.

punkte betrachtet und eine geheimnisvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies gröſstenteils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa direkte, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können. Der Verfasser hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Gröſsen liefern können, ihre Beantwortung finden wird.“

Konstruktion der imaginären Gröſsen.

177.

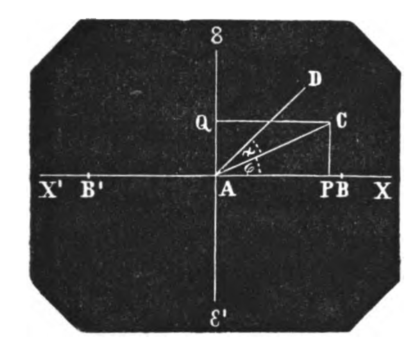
Über die geometrische Konstruktion der imaginären Gröſsen hat Herr Drobisch der Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig eine Abhandlung überreicht, welche zugleich eine kurze Geschichte der imaginären Gröſsen und Nachweis der hierüber erschienenen Schriften enthält. Sie ist abgedruckt in den Berichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 2ter Band, 1848. Da auch diese Berichte nur auf öffentlichen Staatsbibliotheken sich befinden, so wollen wir hier folgendes daraus mitteilen:

„Meine Nachweisung der geometrischen Bedeutung der imaginären Gröſsen, sagt Herr Drobisch, ist folgende:

„Wenn auf einer nach beiden Seiten unbegrenzten Geraden X′X ein fester Punkt, A, gegeben ist, und von diesem aus nach entgegengesetzten Richtungen auf X′X zwei gleiche Abschnitte AB = AB′ aufgetragen werden, so bezeichnet man die Lage des Punkts B′ gegen A in Vergleichung mit der Lage des Punkts B gegen A durch — AB, und umgekehrt die Lage von B gegen A in Vergleichung mit der Lage von B′ gegen A durch — AB′. Man erhält also die Bestimmung der Lage eines jeden der beiden Punkte B, B′ aus der Bestimmung der Lage des andern durch Vorsetzung des Minuszeichens, oder, wie es

auch aufgefafst werden kann, des Koeffizienten (—1), so dafs AB′=(—1) AB und AB=(—1) AB′ ist, wenn resp. AB, AB′ die Bestimmungen der Lage von B, B′ gegen A bedeuten. Der Koeffizient (—1) drückt hier also die wechselseitige Beziehung aus, welche zwischen den Lagen der beiden, in gleichen Entfernungen von A nach entgegengesetzten Richtungen bestimmten Punkte B, B[1] gegen A stattfindet*).

Wenn nun in der Ebene, in welcher X′X liegt, aufserhalb dieser Linie ein dritter Punkt, C, in der Entfernung AC = AB = AB′ von A gegeben ist, und AC mit AB den Winkel φ bildet, so fragt es sich, ob auch dann noch ein Koeffizient von AB aufgefunden werden kann, der die Lage von C gegen A in Vergleichung mit der Lage von B gegen A ausdrückt.



Da die Verschiedenheit zwischen der Lage von C gegen A und von B gegen A nur auf der Verschiedenheit der Richtungen der beiden Geraden AB, AC beruht, und diese durch den Winkel φ bestimmt wird, so mufs der gesuchte Koeffizient eine Funktion von φ sein. Er sei daher $= f(\varphi)$, so dafs also:

$$AC = AB \,.\, f(\varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ändere jetzt AC seine Lage, indem φ in $\varphi + \psi$ und AC in AD übergehen mag, so wird auf dieselbe Weise die Lage

*) Man kann von hier an auch folgenden kürzern Weg einschlagen: Sei λ der unbekannte Faktor, mit welchem man die Linie AB multiplizieren mufs, damit sie sich um 90° dreht (in die Lage AE kommt), so mufs man nochmals mit λ multiplizieren, damit sie sich wiederum um 90° dreht, (in die gerade entgegengesetzte Lage AB′=(—1) . AB kommt), so dafs nämlich: $\lambda^2 . AB = -AB$, woraus: $\lambda = \sqrt{-1}$. Ist nun $AB = +1$, so ist $AE = +\sqrt{-1}$, $AB' = \lambda^2 = -1$, $AE' = \lambda^3 = -\sqrt{-1}$, $AB = \lambda^4 = 1$. Die Ausführung der Multiplikation mit lateralen Gröfsen wird hierdurch einer Versinnlichung fähig. So ist z. B.: $2i . 3i = 6 . i^2 = -6$ &c.

von D gegen A in Vergleichung mit der Lage von B gegen A bestimmt durch:

$$AD = AB \,.\, f(\varphi + \psi) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Es läſst sich aber nach demselben Prinzip auch die Lage von D gegen A in Vergleichung mit der von C gegen A bestimmen, und wird, da AD mit AC den Winkel ψ bildet, alsdann sein:

$$AD = AC \,.\, f(\psi) \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Substituiert man hier für AC seinen Ausdruck in (1), so folgt

$$AD = AB \,.\, f(\varphi) \,.\, f(\psi)$$

und wenn dies mit dem Ausdruck von AD in (2) gleich gesetzt wird:

$$f(\varphi + \psi) = f(\varphi) \,.\, f(\psi) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dieser Bedingungsgleichung für die Form der Funktion f entspricht aber bekanntlich allein:

$$f(\varphi) = a^{\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)^{*})$$

wo a eine noch unbestimmte Gröſse ist. Demnach ist, vermöge (1):

$$AC = AB \,.\, a^{\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Hieraus wird nun für $\varphi = \pi$:

$$AC = AB \,.\, a^{\pi}.$$

Für diesen Abweichungswinkel geht aber AC in AB′ über, und ist daher $AC = AB' = -AB$; woraus sofort folgt:

$$a^{\pi} = -1;\; a = (-1)^{\frac{1}{\pi}} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Demnach ist, vermöge (6):

$$AC = AB \,.\, (-1)^{\frac{\varphi}{\pi}} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

und $(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}}$ der gesuchte Koeffizient.

Wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, wo AC in die auf X′X in A senkrechte Gerade AE übergeht, so wird nach (8):

$$AE = AB \,.\, (-1)^{\frac{1}{2}} = AB \,.\, \sqrt{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

*) Weil $a^{\varphi} \,.\, a^{\psi} = a^{\varphi + \psi}$

Ebenso wird für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ oder $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, wo AC in die der AE entgegengesetzten Linie AE′ übergeht:

$$AE' = AB(-1)^{\frac{3}{2}} = -AB.\sqrt{-1} \ldots\ldots (10)$$

Hieraus erhellt, dafs $\pm\sqrt{-1}$ als der Koeffizient anzusehen ist, durch welchen die senkrechte Lage der damit behafteten Geraden gegen die Lage, welche ihr zukommt, wenn sie den Koeffizienten ± 1 hat, bezeichnet wird. Es wird nun aber auch:

$$(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}} = \cos\varphi + i\sin\varphi \text{ *)}$$

daher nach (8):

$$AC = AB(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ldots\ldots\ldots (11)$$

wofür auch gesetzt werden kann:

$$AC = AB.e^{i\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Es kann also auch $e^{i\varphi}$ als der gesuchte Koeffizient betrachtet werden. Schreibt man für (11):

$$AC = AB.\cos\varphi + iAB.\sin\varphi$$

so bedeutet in dem Ausdrucke zur Rechten des Gleichheitszeichens AB cos φ ohne Zweifel eine nach derselben Richtung wie AB von A aus auf AX aufzutragende Linie, da cos φ nur zur Bestimmung ihres Gröfsenverhältnisses gegen AB dient. Dagegen i.AB sin φ nach (9) eine Linie von der Länge AB sin φ, welche in A senkrecht auf AX zu errichten ist. Fällt man also von C auf AB und AE die resp. Senkrechten CP, CQ, so ist mit Bezug auf die Lage:

$$AP = AB.\cos\varphi;\ AQ = AB\sin\varphi.\sqrt{-1}.$$

Sollen nun nach (11) diese Linien addiert werden, so kann dies nichts anderes bedeuten, als: es soll die zweite Linie AQ, ohne ihre Gröfse und Richtung zu ändern, so an die erste AP an-

*) Es ist $\cos\pi \pm i\sin\pi = -1$. Mithin:

$$(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}} = (\cos\pi \pm i\sin\pi)^{\frac{\varphi}{\pi}} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi.$$

gesetzt werden, dafs ihr Anfangspunkt mit dem Endpunkt der letztern zusammenfällt. Dies geschieht, wenn AQ sich selbst parallel fortrückt, bis sie in die Lage PC kommt" &c.

Reduktion der Gleichungen durch das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe.

178.

Das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe

$$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \ldots\ldots$$

mit den Differenzen

$$\begin{array}{ccccccc} a & & a & & a_3 & & a_4\ldots \\ & b & & b_2 & & b_3\ldots & \\ & & c & & c_2\ldots & & \\ & & & d\ldots. & & & \\ & & & & e\ldots. & & \end{array}$$

ist (s. Formel P in § 48)

$$\left.\begin{aligned} t_n = t_0 &+ \left(a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \frac{d}{4} + \frac{e}{5}\right) n \\ &+ \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{11d}{24} - \frac{5e}{12}\right) n^2 \\ &+ \left(\frac{c}{6} - \frac{d}{4} + \frac{7e}{24}\right) n^3 \\ &+ \left(\frac{d}{24} - \frac{e}{12}\right) n^4 + \frac{e}{120} n^5 + \ldots \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Ist nun die Gleichung $f(x) = 0$ gegeben und setzt man in derselben für x der Reihe nach die Werte

$$\varkappa, \quad \varkappa + \varepsilon, \quad \varkappa + 2\varepsilon, \quad \varkappa + 3\varepsilon, \ldots\ldots$$

so mag $f(x)$ bezüglich die Werte

$$t_0, \quad t_1, \quad t_2, \quad t_3, \ldots\ldots$$

mit den Differenzen

$$\begin{array}{ccc} a & & a_2\ldots \\ & b\ldots & \end{array}$$

annehmen. Da nun $f(x) = 0$ sein soll, so ist $t_n = 0$, wenn

$x = \varkappa + n\varepsilon$. Bestimmt man daher n aus der Gleichung $0 = t_\varkappa$ d. i. (siehe A) aus der Gleichung

$$0 = t_0 + \left(a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \ldots\right) n + \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2} \ldots\right) n^2 + \frac{c}{6} n^3 + \ldots\ldots (N)$$

so ist
$$x = \varkappa + n\varepsilon \ldots\ldots (Q)$$

Beispiel. $x^2 - \left(8 + \frac{\log x}{2}\right) x + 17 = 0 \ldots\ldots f(x)$.

$x = 3; \quad 4; \quad 5$ gesetzt, giebt
$f(x) = 1{,}28432; \; -0{,}20412; \; 0{,}25257$
$-1{,}48844 \quad 0{,}45669$
$1{,}94513$ } Diff.

Mit $t_0 = 1{,}28432$, $a = -1{,}48844$, $b = 1{,}94513$ geht Gleichung N über in

$$0 = 1{,}28432 + \left(-1{,}48844 - \frac{1{,}94513}{2}\right) n + \frac{1{,}94513}{2} n^2$$

und es ist
$$n' = 0{,}7359 \text{ und } n'' = 1{,}7946.$$

Aus Q ergiebt sich nun mit $\varkappa = 3$ und $\varepsilon = 1$

$$x' = 3 + 0{,}7359 . 1 = 3{,}7359$$
$$x'' = 3 + 1{,}7946 . 1 = 4{,}7946.$$

Zusatz. Benutzt man nur 2 Hypothesen:

$x = \alpha, \; \beta$ und erhält man damit
$f(x) = \text{A}, \; \text{B}$, so ist

$\varkappa = \alpha$, Differenz $\varepsilon = \beta - \alpha$, $t_0 = \text{A}$, Differenz $a = \text{B} - \text{A}$ und Gleichung N wird

$$o = \text{A} + (\text{B} - \text{A}) n,$$

daher $n = \frac{\text{A}}{\text{A} - \text{B}}$.

Aus Q ergiebt sich alsdann

$$x = \alpha + \frac{\text{A}}{\text{A} - \text{B}} . (\beta - \alpha)$$

oder die schon bekannte Näherungsformel

$$x = \frac{\text{A}\beta - \text{B}\alpha}{\text{A} - \text{B}}.$$

Anmerkung. Von besonderem Vorteil kann die Reduktion eines zusammengesetzteren (z. B. transscendenten) Ausdrucks auf eine einfachere algebraische Form in der Integralrechnung werden. Ist z. B. $\sqrt{x}.\sin x.l(x+2)$ gegeben und weifs man, dafs x innerhalb der Grenzen 0 und π liegen mufs, so kann man für x die Hypothesen $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi$ wählen und der damit erhaltene bequeme algebraische Ausdruck (vom 6. Grade) ist dem gegebenen transscendenten sehr nahe identisch.

Auflösung der Gleichungen mit 2 Unbekannten.

179.

Es seien die Gleichungen

$$\text{I. } f(x,y)=0 \text{ und II. } \varphi(x,y)=0$$

gegeben und es mag y leichter aus I. als aus II. berechnet werden können, wenn für x bestimmte Werte substituiert werden.

Wählt man in I. für x die Werte

$$\varkappa, \quad \varkappa+\varepsilon, \quad \varkappa+2\varepsilon, \quad \varkappa+3\varepsilon \ldots\ldots$$

und löst diese Gleichung nach y auf, substituiert alsdann die für y gefundenen Werte in II. und löst diese letztere Gleichung nach x auf, so mögen sich hier für x bezüglich die Werte

$$\begin{array}{ccccccc} m_0 & & m_1 & & m_2 & & m_3 \ldots\ldots \text{ mit den Diff.} \\ & a & & a_2 & & a_3 \ldots & \\ & & b & & b_2 \ldots & & \\ & & & c \ldots & & & \end{array}$$

ergeben. Offenbar ist nun $x=m_n$, wenn $m_n=\varkappa+n\varepsilon$.

Nach Formel A in § 178 geht aber letztere Gleichung über in

$$m_0+\left(a-\frac{b}{2}+\frac{c}{3}\ldots\right)n+\left(\frac{b}{2}-\frac{c}{2}\ldots\right)n^2+\ldots=\varkappa+n\varepsilon \ldots\ldots \text{(N)}.$$

Ist hier die Unbekannte n gefunden, so ist

$$x=\varkappa+n\varepsilon \ldots\ldots \text{(Q)}.$$

Beispiel. I. $xy - y^{\frac{x}{3}-1} - 10 = 0$; II. $x^{y-2} + \frac{x}{y} - 10 = 0$;

Wegen des Exponent $\frac{x}{3}$ setze man die Hypothesen

$$x = 3, \qquad 6, \qquad 9, \qquad 12.$$

Diese Werte in I. substituiert, resultiert daselbst

$$y = 3{,}66667; \qquad 2; \qquad 1{,}29844; \qquad 2{,}93045.$$

Diese für y gefundenen Zahlen in II. substituiert ergeben in dieser Gleichung

$$x = 3{,}73273; \qquad 18; \qquad 12{,}76687; \qquad 8{,}30321.$$

$$\text{Diff.} \begin{cases} 14{,}26727 \quad -5{,}23313 \quad -4{,}46366 \\ -19{,}50040 \quad 0{,}76947 \\ 20{,}26987 \end{cases}$$

Mit $\varkappa = 3$, $\varepsilon = 3$, $m_0 = 3{,}73273$, $a = 14{,}26727$, $b = -19{,}50040$, $c = 20{,}26987$ wird Gleichung N:

$$3{,}73273 + 30{,}77409n - 19{,}88514n^2 + 3{,}37831n^3 = 3 + 3n,$$

oder $$n^3 - 5{,}88612n^2 + 8{,}22130n + 0{,}21689 = 0.$$

Folglich
$$n' = 2{,}35095,$$
$$n'' = -0{,}02590,$$
$$n''' = 3{,}56017.$$

Damit ergiebt sich aus Q:

$$x' = 3 + 2{,}35095 \,.\, 3 = 10{,}05285,$$
$$x'' = 3 - 0{,}02590 \,.\, 3 = 2{,}92230,$$
$$x''' = 3 + 3{,}56017 \,.\, 3 = 13{,}68051.$$

Da der letztere Wert aufserhalb der Hypothesenreihe liegt, so ist es zweifelhaft, ob derselbe gültig ist. In der That findet man für alle Hypothesen, die > 12 genommen werden, keine Lösung.

Zusatz. Nimmt man für x nur 2 Hypothesen und zwar
in Gleichung I: $x = \varkappa, \varkappa'$, womit
aus Gleichung II: $x = m, m'$ resultiere,
so ergiebt sich die bequeme Näherungsformel

$$x = \frac{\varkappa m' - \varkappa' m}{\varkappa + m' - (\varkappa' + m)}.$$

Auflösung der Gleichungen mit 3 Unbekannten.

180.

Es seien die Gleichungen

I. $f(x, y, z) = 0$; II. $\varphi(x, y, z) = 0$; III. $\psi(x, y, z) = 0$

gegeben. Setzt man für x bestimmte Werte, so läfst sich (z. B. nach § 179) aus je 2 Gleichungen y und z finden. Die Gleichungen mögen nun so angeordnet sein, dafs sich y leichter aus I. und II., sowie aus I. und III., also weniger leicht aus II. und III. berechnen läfst.

Wählt man die Hypothesen

$$x = \varkappa, \qquad \varkappa + \varepsilon, \qquad \varkappa + 2\varepsilon, \ldots.$$

setzt dieselben zuerst in I. und II. ein und erhalte, nachdem z (z. B. nach § 179) eliminiert worden, bezüglich

$$\begin{array}{llll} & y = m_0 & m_1 & m_2 \ldots \\ \text{Diff.} & a & & a_2 \ldots \\ & & b \ldots. & \\ & & c \ldots & \end{array}$$

Dieselben Werte für x alsdann in I. und III. substituiert mögen daselbst

$$\begin{array}{llll} & y = p_0 & p_1 & p_2 \ldots.. \\ \text{Diff.} & a' & & a'_2 \ldots \\ & & b' \ldots & \\ & & c' \ldots & \end{array}$$

ergeben.

Aus diesen Reihen geht sofort hervor, dafs $y = m_n$ und $x = \varkappa + n\varepsilon$, wenn $m_n = p_n$.

Nach Formel A in § 178 geht nun letztere Gleichung über in

$$m_0 + \left(a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)n + \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right)n^2 + \ldots =$$

$$p_0 + \left(a' - \frac{b'}{2} + \frac{c'}{3}\right)n + \left(\frac{b'}{2} - \frac{c'}{2}\right)n^2 + \ldots\ldots.. \text{(N)}$$

Ist hier n gefunden, so ist

$$x = \varkappa + n\varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots (Q)$$

Beispiel.
$$\text{I. } z + xy - 7 = 0,$$
$$\text{II. } y + x^2 z + 41 = 0,$$
$$\text{III. } xy + xz - 1 = 0.$$

Mit $x = -0{,}04 \qquad -0{,}03 \qquad -0{,}02$ erhält man

aus I. und II.: $y = -41{,}008 \qquad -41{,}005 \qquad -41{,}002$

Diff. $0{,}003 \qquad 0{,}003$

aus I. und III.: $y = -30{,}769 \qquad -39{,}158 \qquad -55{,}882$

Diff. $\begin{cases} -8{,}389 \qquad -16{,}724 \\ \qquad -8{,}335 \end{cases}$

Mit $\varkappa = -0{,}04$; $\varepsilon = 0{,}01$; $m_0 = -41{,}008$; $a = 0{,}003$; $b = 0$; $p_0 = -30{,}769$; $a' = -8{,}389$; $b' = -8{,}335$ geht Gleichung N über in:

$$-41{,}008 + 0{,}003n = -30{,}769 + (-8{,}389 + 4{,}1675)n - 4{,}1675n^2.$$

Mithin $n = 1{,}1405$ und nach Gleichung Q

$$x = -0{,}04 + 1{,}1405 . 0{,}01 = -0{,}0286.$$

Zusatz. Bei nur 2 Hypothesen und zwar

$x = \varkappa,\ \varkappa'$ mag sich

aus I. und II. $y = m,\ m'$

aus I. und III. $y = p,\ p'$ ergeben.

Alsdann resultiert die sehr bequeme Näherungsformel:

$$x = \frac{(m - p)\varkappa' - (m' - p')\varkappa}{m - p - (m' - p')}.$$

Anmerkung. Mittelst der in § 179 und 180 gegebenen Methoden lassen sich Gleichungen mit 2 oder 3 Unbekannten selbst dann noch auflösen, wenn die bis jetzt bekannten Methoden nicht zum Ziele führen.

Inhaltsverzeichnis.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.


HW 22NU F



